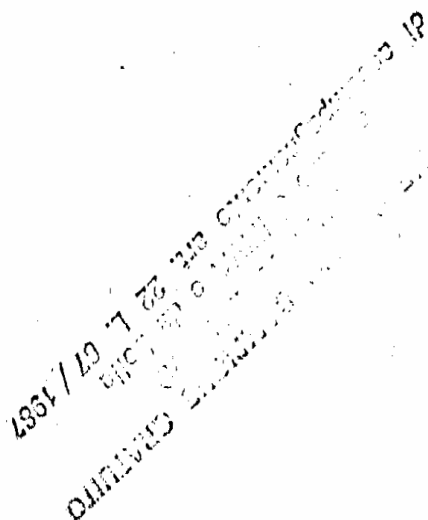


ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA



ZANICHELLI

■ © 1993 Zanichelli Editore S.p.A. - Bologna

— I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale, con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), sono riservati
■ per tutti Paesi.

— L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre una porzione non superiore a un decimo del presente volume. Le richieste di riproduzione vanno inoltrate all'Associazione
■ Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere a Stampa (AIDROS), via delle Erbe 2, 20121 Milano, tel. 02/86463091, fax 02/89010863.

— L'editore considera legittima, per quanto di sua spettanza, la fotocopia di volumi fuori catalogo, cioè non più compresi nei propri cataloghi, con l'eccezione di edizioni precedenti di volumi
■ di cui è in catalogo una nuova edizione.
Del pari non è considerata legittima la fotocopia di volumi non più in catalogo Zanichelli
— ma pubblicati al momento da altro editore.

■ Copertina: Duilio Leonardi

— In copertina: immagine realizzata al computer con software grafico tridimensionale
dalla DB - TECH s.n.c., Via Dante 1/f, Bologna

■ Il testo è stato composto dall'autrice utilizzando il sistema AMS - TEX

— Prima edizione: marzo 1993

■ Ristampe:

— 6 7 8 9 1998 1999 2000

■ Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Siamo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

■ Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro l'indirizzo a cui rivolgersi è:

— Zanichelli Editore S.p.A.
Via Imerio 34 - 40126 Bologna
Tel. 051/293111 - Fax 051/249782

■ Stampato dalla Tipostampa Bolognese
Via Collamarini, 5 - Bologna
— per conto della Zanichelli Editore S.p.A.-
Via Imerio 34 - 40126 Bologna

INDICE

Prefazione	VII
Alfabeto greco	X
Principali simboli usati nel testo	XI
Simboli logici ed insiemistici	XI

Capitolo 1 SISTEMI LINEARI

1. Alcuni cenni sui campi di numeri	1
2. Risoluzione dei sistemi lineari a scala	4
2.E Esercizi	16
3. Il metodo di eliminazione di Gauss e la risoluzione dei sistemi lineari compatibili	17
3.E Esercizi	27
4. Spazi vettoriali numerici sui reali	29
4.E Esercizi	34
5. Prodotto fra matrici e sue proprietà	35
5.E Esercizi	43
6. Matrici invertibili: un algoritmo per il calcolo della matrice inversa	45
6.E Esercizi	48
7*. Forma matriciale dell'eliminazione di Gauss. La fattorizzazione $PA = LDU$ per una matrice A non singolare	49
7.E Esercizi	54
8. Esercizi di ricapitolazione	54

Capitolo 2 SPAZI VETTORIALI

1. Altri esempi di spazi vettoriali	56
2. Basi e dimensione per un sottospazio	61
2.E Esercizi	65
3. Spazi vettoriali su un campo K : il caso di dimensione finita	65
4. L'algoritmo di Gauss per selezionare una base da un sistema di generatori	68
4.E Esercizi	72
5. Sottospazi e sottovarietà affini	73
5.E Esercizi	79
6. Intersezione e somma di sottospazi: somme dirette	80

■	6.E	Esercizi	84
—	7.	Esercizi di ricapitolazione	85
■	Capitolo 3 DETERMINANTI		
—	1.	Le permutazioni di n elementi	88
	2.	La definizione di determinante	91
■	2.E	Esercizi	95
—	3.	Proprietà del determinante	96
	3.E	Esercizi	101
■	4.	Applicazioni: calcolo della matrice inversa, teorema di Cramer	101
	4.E	Esercizi	104
—	5*.	Cenni storici sullo sviluppo dell'algebra lineare	105
	6.	Esercizi di ricapitolazione	107
—	Capitolo 4 GEOMETRIA AFFINE		
■	1.	Riferimenti cartesiani sulla retta, nel piano e nello spazio .	108
	2.	Condizioni analitiche di appartenenza e parallelismo . . .	111
—	2.E	Esercizi	117
	3.	La geometria analitica del piano	119
■	3.E	Esercizi	123
—	4.	Forme particolari delle equazioni cartesiane di rette e piani nello spazio. Risoluzione geometrica di alcuni problemi . .	124
■	5*.	Gradi di libertà e condizioni lineari	130
	5.E	Esercizi	132
—	6*.	Sui fondamenti della geometria euclidea	133
	7.	Esercizi di ricapitolazione	140
—	Capitolo 5 Trasformazioni lineari		
■	1.	Trasformazione lineare associata ad una matrice	142
	1.E	Esercizi	147
—	2.	Trasformazioni lineari iniettive, suriettive e biiettive . . .	147
■	2.E	Esercizi	149
—	3.	Cambiamenti di base per uno spazio vettoriale di dimensione finita	150
	3.E	Esercizi	153
■	4.	Trasformazioni lineari e matrici ad esse associate. Endomorfismi e matrici coniugate	154
	4.E	Esercizi	161

Capitolo 6 GEOMETRIA EUCLIDEA

1.	Prodotto scalare nello spazio $\mathcal{V}_O$ dei vettori geometrici . . .	165
1.E	Esercizi	170
2.	Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt	170
2.E	Esercizi	174
3.	Prodotto vettoriale in $\mathcal{V}_O$	174
4.	Espressioni analitiche per le misure di distanze e di angoli. Condizioni di ortogonalità	177
4.E	Esercizi	185
5.	Rappresentazione analitica di alcune curve del piano definite facendo uso di distanze	186
5.E	Esercizi	191
6.	Rappresentazione analitica di alcune curve e superfici dello spazio ordinario definite facendo uso di distanze (o angoli) .	192
6.E	Esercizi	197
7.E	Esercizi di ricapitolazione	198

Capitolo 7 DIAGONALIZZAZIONE DELLE MATRICI

1.	Autovalori ed autovettori di un endomorfismo	201
1.E	Esercizi	205
2.	Determinazione analitica degli autovalori ed autovettori . .	206
2.E	Esercizi	208
3.	Problemi algebrici relativi alla ricerca degli autovalori . . .	209
3.E	Esercizi	211
4.	Caso dell'esistenza di una base di autovettori	211
4.E	Esercizi	214
5.	Ancora sugli invarianti per coniugazione	214
5.E	Esercizi	216
6*.	Diagonalizzazione simultanea di due matrici	216
6.E	Esercizi	217
7.	Esercizi di ricapitolazione	218

Capitolo 8 SPAZI VETTORIALI METRICI

1.	Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$	220
1.E	Esercizi	226
2.	Proiettori ortogonali su sottospazi di $\mathbb{R}^n$ e loro matrici . .	227

2.E	Esercizi	231
3.	Il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt . .	232
3.E	Esercizi	235
4.	Sottospazi ortogonali e somme dirette ortogonali	236
4.E	Esercizi	238
5.	Il prodotto hermitiano canonico. Matrici unitarie e cambiamenti di base ortonormali	239
5.E	Esercizi	242
6*.	Struttura metrica di uno spazio vettoriale	242
7.	Esercizi di ricapitolazione	245

SOLUZIONI DI ESERCIZI PROPOSTI

Capitolo 1	247
Capitolo 2	251
Capitolo 3	255
Capitolo 4	258
Capitolo 5	262
Capitolo 6	266
Capitolo 7	272
Capitolo 8	276

Indice analitico	280
Testi consigliati	283

PREFAZIONE

Un primo corso di geometria a livello universitario viene impartito a vari Corsi di Laurea di Facoltà distinte; ma i vari programmi hanno usualmente in comune una parte preponderante, quella relativa all'algebra lineare ed alle sue più immediate applicazioni geometriche. Questo testo fornisce argomenti per un "modulo" iniziale, cioè per un corso di Geometria della durata di circa 60 ore fra lezioni ed esercitazioni. Per i corsi della durata di 120 ore, siano essi divisi o meno in moduli, esso può essere integrato con il testo *Complementi di Algebra lineare e Geometria*, Ed. Zanichelli. Complessivamente i due testi sono stati strutturati in modo da poter essere usati in modo differenziato nei diversi corsi per poter consentire agevolmente il passaggio dalla così detta "laurea breve" alla laurea tradizionale e viceversa.

Le motivazioni che mi hanno portato alla stesura di questo testo sono relative a due tipi di esigenze fra loro collegate: la prima riguarda la scelta degli argomenti ed il metodo di presentazione, la seconda cerca di ovviare ad alcune difficoltà che spesso incontrano gli studenti che, al primo anno di Università, devono frequentare un corso iniziale di Geometria. Infatti, in generale, lo studente non è abituato a leggere un testo di matematica (spesso nelle scuole secondarie si è limitato ad usare il libro di testo solo come fonte di esercizi); d'altra parte i diversi tipi di scuola secondaria non forniscono una base comune di conoscenza matematica ed è quindi opportuno, per un corso di primo anno, presupporre il meno possibile. Non deve pertanto meravigliare che si sia assunto come punto di partenza, per lo studio dell'algebra lineare, il metodo di eliminazione di Gauss che presuppone solo di saper sommare equazioni lineari (operazione a cui tutti sono abituati); nè deve meravigliare il fatto che i capitoli iniziali siano scritti con linguaggio il più possibile semplice e contengano esplicitamente dimostrazioni dettagliate ed una serie di osservazioni a cui spesso lo studente non pensa (un pò con lo stile informale con cui il docente si esprime a lezione). Via via che si procede nel testo il linguaggio diventa più stringato e le notazioni più compatte. In breve questo testo è stato scritto perché lo studente lo possa leggere (e lo legga effettivamente!) e serva solo come traccia per il docente.

Lo studio dell'algebra lineare, cioè degli spazi vettoriali e delle loro proprietà, risulta più facilmente assimilabile se si fa uso del calcolo matriciale e del metodo di Gauss il quale, tra le altre cose, presenta il vantaggio di abituare subito lo studente al concetto di algoritmo che è molto importante in matematica.

In tutto il testo, ove è stato possibile, ho cercato di motivare le nozioni introdotte e di partire dallo studio di esempi per poi sviluppare in modo rigoroso la corrispondente teoria astratta. Nella scelta delle dimostrazioni sono state privilegiate quelle costruttive che evidenziano un algoritmo (discutendo in alcuni casi i problemi effettivi di calcolo ad essi collegati), essendo mia convinzione che non si possa al giorno d'oggi prescindere dall'uso del computer e dalla conoscenza di elementi di programmazione, indipendentemente dal Corso di Laurea.

Il libro è costituito da otto capitoli ciascuno dei quali è suddiviso in sezioni. Alcune sezioni e/o dimostrazioni sono state segnate con un asterisco; esso sta ad indicare che l'argomento può essere omesso senza alterare la sostanza del programma proposto globalmente nel testo e può essere lasciato allo studente volenteroso come parte facoltativa.

Una particolare enfasi è stata data sia alle applicazioni di carattere geometrico sia allo svolgimento di esercizi in quanto molto spesso per lo studente è più facile imparare la dimostrazione di un teorema che applicarlo in un caso concreto.

In media ogni sezione è seguita da esercizi attinenti all'argomento esposto; alla fine di ogni capitolo vi è una sezione dedicata ad esercizi di ricapitolazione. Ciascuno di essi è composto da tre quesiti riepilogativi del materiale svolto nel capitolo stesso e nei precedenti. Questo serve da una parte ad evitare uno studio per compartimenti separati ed obbliga lo studente ad uno sforzo di sintesi; dall'altra fornisce, nella parte finale del testo, veri e propri facsimile di un compito d'esame. A tal proposito è opportuno che il docente fissi all'inizio del corso la durata del compito d'esame e le modalità (se è consentito o meno, per esempio, l'uso del testo) in modo che durante l'anno lo studente svolga gli esercizi di ricapitolazione con le stesse modalità (in media due ore sono sufficienti per presentare un elaborato ben giustificato ed ordinato, ovvero scritto con calligrafia leggibile).

Alla fine del testo vengono fornite le soluzioni degli esercizi proposti, proprio per venire incontro alle continue richieste degli studenti che si sentono più sicuri quando sanno che *l'esercizio è venuto!* Alcune soluzioni sono dettagliate, altre più sintetiche e ... speriamo! ... senza troppi errori di calcolo e/o di stampa. In ogni caso è mia personale convinzione che un esercizio sia utile solo se viene svolto con accuratezza, richiamando gli argomenti di cui ci si avvale e giustificando i passaggi, a prescindere dal risultato numerico che deve comunque essere coerente con i dati.

Gli argomenti trattati corrispondono ad argomenti standard per un corso di Geometria, cui sono state affiancate altre nozioni (come quella di invariante, di diagonalizzazione simultanea, di orbita, etc.) che non

presentano difficoltà didattiche e che sono particolarmente utili non solo per studi più approfonditi di matematica, ma anche per le applicazioni in altre discipline. Gli argomenti possono essere sviluppati tutti o in parte a seconda delle esigenze didattiche. Le sezioni ed i capitoli sono articolati in modo tale che alcuni sono totalmente indipendenti da altri e possono essere omessi oppure svolti in un ordine differente. In questo modo è possibile scegliere se e quanto mettere in evidenza gli aspetti geometrici che sono contenuti nei capitoli 4 e 6.

Prima di terminare voglio esplicitamente ringraziare quei colleghi che, avendo utilizzato il testo *Algebra lineare e Geometria*, Ed. Zanichelli (1990), di cui questo è una filiazione, hanno fatto osservazioni estremamente utili che ho cercato di accogliere.

Un ringraziamento anche agli studenti di Ingegneria e di Matematica che hanno recentemente seguito corsi di Geometria da me tenuti presso l'Università di Roma Tor Vergata; essi hanno influenzato con domande ed osservazioni la scelta e la presentazione degli argomenti di questo libro.

Un ringraziamento infine alla Sig.na Michela Procesi che ha effettuato i disegni (volutamente naïfs) del testo (facendo uso del programma Cricket Draw su Macintosh) e successivamente li ha inseriti nei files di *AMS-TEX* con cui questo testo è stato elaborato.

Silvano Procesi

ALFABETO GRECO

MAIUSCOLO

MINUSCOLO

NOME

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mi (o mu)
N	ν	ni (o nu)
Ξ	ξ	xi (csi)
O	$\omicron$	òmicron
Π	π	pi (greco)
P	ρ	ro
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	ipsilon
Φ	ϕ, φ	fi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

PRINCIPALI SIMBOLI USATI NEL TESTO

C	2	$RA(O, x, y, z)$	111
C^n	60	$RC(O, i, j, k)$	111
$\det()$	91	$RC(O, x, y, z)$	111
$\dim()$	63	R^n	29
$\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^2$	56, 59	$R[x]$	59
e_i, e^i	41	$R_n[x]$	65
e_{rs}	35	S_n	89
$E_{rs}, E_{rs}(\lambda)$	50	$Span(, \dots,)$	33
$Im()$	145, 154	$tr()$	215
$ker()$	145, 154	V_λ	203
$M_n(\mathbb{R})$	40	$\mathcal{V}_O$	56
$M_{mn}(\mathbb{R})$	33	$\mathcal{V}'_O$	59
$\mathbb{N}$	1	$V \cap W$	80
$\mathcal{O}_A$	160	$V + W$	80
$p_A(\lambda)$	206	$W^\perp$	237
P_W	227	$\mathbb{Z}$	1
$\mathbb{Q}$	1	$\langle , \rangle$	167, 221
$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	3	$\langle \rangle$	239
$\mathbb{R}$	1	$\oplus$	82
$RA(O, i, j, k)$	111	$()^H$	239

SIMBOLI LOGICI ED INSIEMISTICI

$\exists$	<i>qualunque voce del verbo esistere</i>
$\forall$	<i>per ogni</i>
$\in$	<i>qualunque voce del verbo appartenere ($\notin$ negazione)</i>
$\supseteq$	<i>forma attiva del verbo contenere</i>
$\supset$	<i>forma attiva del verbo contenere propriamente</i>
$\subseteq$	<i>forma passiva del verbo contenere</i>
$\subset$	<i>forma passiva del verbo contenere propriamente</i>
$\cap$	<i>intersezione di insiemi</i>
$\cup$	<i>unione di insiemi</i>
$\emptyset$	<i>insieme vuoto.</i>
$\Rightarrow$	<i>qualunque voce del verbo implicare</i>
$\Leftrightarrow$	<i>se e solo se</i>

Capitolo 1

SISTEMI LINEARI

INTRODUZIONE. In questo capitolo studiamo i sistemi lineari di m equazioni in n incognite. Un tal studio necessita che si precisi la natura dei coefficienti del sistema che sono, in generale, elementi di un "campo".

Nella prima sezione diamo alcuni cenni sui campi numerici già noti allo studente (numeri razionali e reali) ed introduciamo altri esempi significativi. La trattazione dei sistemi lineari però, per motivi didattici, viene svolta usando i numeri reali.

Si studiano inizialmente le soluzioni di sistemi di tipo particolare, detti anche "sistemi a scala". Il metodo di risoluzione proposto per un sistema generale è "l'eliminazione di Gauss" che permette di riconoscere se un sistema è compatibile e di ricondurlo al caso precedentemente citato.

Viene inoltre introdotto il linguaggio degli "spazi vettoriali" facendo uso di esempi numerici. Nelle successive sezioni si introduce il "calcolo matriciale", in particolare viene presentato un algoritmo efficiente per il calcolo della matrice inversa.

Brevi cenni storici saranno dati alla fine del capitolo 3, quando avremo collegato la teoria dei sistemi a quella degli spazi vettoriali ed avremo introdotto la nozione di "determinante".

1. ALCUNI CENNI SUI CAMPI DI NUMERI

Allo studente sono noti dalle scuole secondarie vari insiemi di numeri:

- N** l'insieme dei *numeri naturali* $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$,
- Z** l'insieme dei *numeri interi* $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$,
- Q** l'insieme dei *numeri razionali*,
- R** l'insieme dei *numeri reali*.

Sugli insiemi **N**, **Z**, **Q** ed **R** lo studente sa certamente "operare" cioè eseguire calcoli. Probabilmente ha anche sentito parlare dell'insieme **C** dei numeri complessi, almeno con riferimento alle soluzioni delle equazioni di

secondo grado, anche se probabilmente non ha mai eseguito dei calcoli. Tralasciamo quindi per un momento i numeri complessi.

Le osservazioni che vogliamo fare sono le seguenti: in ciascuno degli insiemi citati abbiamo le operazioni di *somma* e di *prodotto* che godono delle proprietà commutativa, associativa e distributiva. Inoltre l'“elemento neutro” per la somma, cioè 0, è l'unico numero che gode della proprietà: $0 + a = a + 0 = a$; 1 è l'“elemento neutro” per il prodotto, cioè è l'unico elemento che gode della proprietà $1a = a1 = a$, per ogni elemento a dell'insieme.

Ciò che distingue i numeri naturali dagli interi è il fatto che l'operazione di somma ha un'operazione inversa (la *differenza*) in $\mathbb{Z}$ e non in $\mathbb{N}$ nel senso che per ogni $a \in \mathbb{Z}$ il suo opposto $-a \in \mathbb{Z}$, il che è falso per i numeri naturali.

Ciò che distingue $\mathbb{Z}$ dai rimanenti insiemi di numeri $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ è il fatto che la seconda operazione, cioè il *prodotto*, si inverte solo negli ultimi due insiemi citati. Ogni elemento non nullo in $\mathbb{Q}$ ed in $\mathbb{R}$ ammette un inverso $1/a = a^{-1}$ ancora appartenente all'insieme e tale che $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$; ciò non accade in $\mathbb{Z}$ perché in generale l'inverso di un numero intero è un numero razionale e quindi non appartiene a $\mathbb{Z}$!

In questo senso noi diciamo che $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono dei *campi* di numeri.

I numeri complessi godono delle stesse proprietà che abbiamo messo in evidenza per i numeri razionali e reali. $\mathbb{C}$ è l'insieme dei “numeri” $z = a + ib$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ prendono rispettivamente il nome di parte *reale* e parte *immaginaria* del numero complesso z : $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$.

Per esempio il numero $z = 0$ ha $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$; $z = 1$ ha $\operatorname{Re}(z) = 1$, $\operatorname{Im}(z) = 0$; $z = i$ ha $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = 1$.

Per riconoscere che $\mathbb{C}$ è un *campo* (di numeri) occorre preventivamente definire le operazioni di *somma* e di *prodotto*. Si pone quindi:

$$\begin{array}{ll}
 \text{SOMMA} & (a+ib) + (c+id) \stackrel{\text{def}}{=} (a+c) + i(b+d) \\
 (1.1) & \\
 \text{PRODOTTO} & (a+ib) \cdot (c+id) \stackrel{\text{def}}{=} (ac-bd) + i(ad+bc)
 \end{array}$$

In particolare per il numero $z = i$ risulta $i^2 = -1$ (e quindi $i = \sqrt{-1}$). Una volta noto come si effettua il quadrato del numero $z = i$, le definizioni di somma e prodotto si ottengono applicando alle espressioni a primo membro di (1.1) le proprietà di associatività e distributività valide per i numeri reali. È chiaro quindi che queste due operazioni godono della proprietà associativa, distributiva e commutativa. Inoltre $z = 0$ è l'elemento neutro rispetto alla somma, $z = 1$ è l'elemento neutro rispetto al prodotto; per ogni numero $z = a+ib \in \mathbb{C}$, l'opposto è il numero $-z = -a-ib \in \mathbb{C}$. Se $z \neq 0$ il suo inverso è dato da $z^{-1} = a/(a^2+b^2) - ib/(a^2+b^2)$.

* Vogliamo ora presentare un altro esempio di “insieme numerico” che è un *campo*, nel senso che gode delle proprietà degli insiemi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, e $\mathbf{C}$ senza per altro dare una definizione “formale” di tale concetto.

1.2 ESEMPIO. Consideriamo l'insieme $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ costituito da tutti i numeri della forma $a + b\sqrt{3}$, dove a e b sono numeri razionali. Si ottiene così un sottoinsieme di numeri reali (che in generale non sono razionali) sui quali si può operare con l'usuale somma e prodotto, ottenendo come risultato sempre un numero appartenente a $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$. Infatti si ha:

$$(a + b\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{3}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{3})(a' + b'\sqrt{3}) &= aa' + 3bb' + ab'\sqrt{3} + ba'\sqrt{3} \\ &= (aa' + 3bb') + (ab' + ba')\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ogni elemento $a + b\sqrt{3} \in \mathbf{Q}(\sqrt{3})$ ammette come opposto il numero $-a - b\sqrt{3}$ che appartiene ancora a $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$. D'altra parte se $a + b\sqrt{3} \neq 0$, cioè se i numeri razionali a e b non sono simultaneamente nulli, esso ammette come inverso:

$$(a + b\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a - b\sqrt{3}}{(a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3})} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2}$$

che è ancora un numero di $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$. Lo studente tenga presente che per invertire un elemento non nullo occorre fare la “razionalizzazione” del denominatore, operazione ben nota dalle scuole secondarie e di cui forse non ha mai capito a fondo l'importanza!

$\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ gode chiaramente di tutte le proprietà di $\mathbf{Q}$ e di $\mathbf{R}$, (infatti è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$) e quindi fornisce un altro esempio di *campo*. ♥

Si possono costruire altri campi simili a questo? Lo studente provi per esempio a definire $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$. Si otterrà un campo diverso dagli esempi precedentemente dati? Qual è il ruolo svolto dal numero intero 3 nell'esempio $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$? Se si considera $\mathbf{Q}(\sqrt{4})$ si ottiene un campo diverso da quelli già descritti? *

In generale si può dare una definizione assiomatica di *campo* K (cfr. [H] dei testi consigliati) e sviluppare la teoria dei *sistemi lineari* su K .

Per ragioni di semplicità tratteremo il caso $K = \mathbf{R}$ anche se non ci sono sostanziali differenze fra questo e il caso generale. Lo studente interessato potrà, per esempio, provare a ripetere i ragionamenti esposti nelle sezioni che seguono nel caso degli ulteriori esempi di campi numerici che abbiamo introdotto.

2.3 ESEMPIO. Consideriamo il sistema di due equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3 :

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 0.$$

In questo caso il sistema ha una forma particolare "a scala" e le soluzioni possono essere determinate riconducendosi ad un sistema triangolare superiore nel modo seguente. Posto $x_3 = h$ sostituendo in 2.3 si ottiene il sistema "triangolare superiore" nelle incognite x_1, x_2 :

$$(2.3') \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 - h \\ x_2 &= -2h, \end{aligned}$$

la cui soluzione, determinata con la risoluzione all'indietro, è data da $\xi_1 = 1/2(1 - 3h)$, $\xi_2 = -2h$. Pertanto le soluzioni di 2.3 sono date dalle infinite terne di numeri $\xi_1 = 1/2(1 - 3h)$, $\xi_2 = -2h$, $\xi_3 = h$, al variare di h nei numeri reali. $\heartsuit$

Scriviamo ora la forma generale di un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

dove i numeri reali $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ sono i *coefficienti* del sistema ed i numeri $b_1, b_2, \dots, b_m$ sono i *termini noti*.

I coefficienti del sistema sono stati denotati con due indici, dei quali il primo indica l'equazione ed il secondo l'incognita cui si riferiscono; così, per esempio, il coefficiente a_{32} è il coefficiente della seconda incognita (cioè di x_2) nella terza equazione.

I coefficienti del sistema (2.4) sono numeri assegnati, che potremo anche disporre in una *matrice* A di tipo $m \times n$, cioè in una tabella con m righe ed n colonne; i termini noti si possono disporre in una tabella b con una sola colonna:

$$(2.4') \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}.$$

La matrice A prende il nome di *matrice dei coefficienti* del sistema; b prende il nome di *vettore termine noto* (l'uso del termine vettore verrà giustificato nella sezione 4).

In particolare se nel sistema (2.4) il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite, cioè se $m = n$, il sistema si dice *quadrato* e la corrispondente matrice dei coefficienti è una *matrice quadrata* di ordine n .

Una *soluzione* di (2.4) è costituita da n numeri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ che, sostituiti rispettivamente al posto delle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$, verificano simultaneamente tutte le equazioni del sistema.

Un sistema si dice *compatibile* se ammette almeno una soluzione.

2.5 PROBLEMA. *Determinare se il sistema (2.4) è compatibile ed in caso affermativo "contare" le soluzioni. In quali casi la soluzione è unica? ♡*

Prima di dare risposta al precedente problema ne studieremo un caso particolare, il caso in cui il sistema sia *quadrato* e di forma *triangolare superiore*:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{22}x_2 + \dots + a_{2\,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n &= b_{n-1} \\
 a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

in cui la matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.
 \tag{2.6'}$$

Il nome deriva chiaramente dal fatto che la matrice quadrata $n \times n$ dei coefficienti ha la parte sottostante la "diagonale principale" riempita di zeri, mentre il triangolo superiore, delimitato dalla stessa diagonale, è riempito con numeri arbitrari (ma fissati!). Il sistema (2.6) è un caso particolare di (2.4) e corrisponde all'esempio numerico sviluppato in 2.2.

2.7 Proposizione. *Sia dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite di forma triangolare superiore. Esso ammette una ed una sola soluzione se e solo se tutti gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, della diagonale principale della matrice quadrata A dei coefficienti, sono non nulli.*

Dim. Supponiamo che gli elementi della diagonale principale di A siano tutti non nulli. Possiamo procedere ad una risoluzione all'indietro. Dall'ultima equazione si ricava in modo unico la soluzione $\xi_n = b_n/a_{nn}$, (cfr. la discussione di (2.1)). Sostituendo nella penultima equazione questo valore numerico si ottiene un'equazione di primo grado nell'incognita x_{n-1}

che ammette un'unica soluzione ξ_{n-1} . Così procedendo per sostituzione si perviene alla prima equazione che è di primo grado nell'incognita x_1 ed ammette un'unica soluzione ξ_1 . Il sistema (2.6) ammette pertanto l'unica soluzione $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ che si ricava con il procedimento indicato.

* Viceversa assumiamo che il sistema (2.6) ammetta un'unica soluzione $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Supponiamo per assurdo che qualche coefficiente sulla diagonale principale sia nullo ed indichiamo con k il minimo indice per cui $a_{kk} = 0$; $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{k-1, k-1}$ sono quindi non nulli. I numeri $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ sono una soluzione del sistema costituito dalle ultime $n - k$ equazioni e la k^{ma} equazione $a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_k$ ammette la soluzione $\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n$; ma poiché $a_{kk} = 0$ essa ammette anche la soluzione $\alpha, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n$, dove α è un qualunque numero reale. Poiché nelle prime $k - 1$ equazioni i coefficienti sulla diagonale sono tutti non nulli si può ricavare, per sostituzione all'indietro, una soluzione del sistema per ogni valore di α e quindi si ottengono infinite soluzioni, contro l'ipotesi. Ne segue che i coefficienti sulla diagonale sono tutti non nulli. * ♣

2.8 OSSERVAZIONE. Abbiamo qui dato un esempio di dimostrazione fatta attraverso la descrizione di un algoritmo il quale, non solo dimostra la tesi, ma fornisce anche un metodo di calcolo della soluzione. Questo è di fatto un metodo *ricorsivo* in quanto esso, calcolata l'incognita x_n , permette di calcolare l'incognita x_{n-1} ; note queste due permette di calcolare l'incognita x_{n-2} e così via fino alla determinazione di x_2 e di x_1 . ♥

2.9 ESEMPIO. Consideriamo il seguente sistema lineare di tre equazioni nelle sei incognite $x_1, x_2, \dots, x_6$:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 &= 0, \\ x_5 - x_6 &= 2 \end{aligned}$$

la cui matrice dei coefficienti ha la forma "a scala":

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

essendovi all'inizio di ogni gradino un coefficiente non nullo (in questo esempio tutti 1) certamente possiamo ricavare da ogni equazione l'incognita corrispondente. Se portiamo a secondo membro le "variabili libere" x_2, x_4, x_6 otteniamo un sistema triangolare di tre equazioni nelle tre incognite x_1, x_3, x_5 :

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4 + x_6 + 1$$

$$x_3 + x_5 = 2x_4 - x_6$$

$$x_5 = x_6 + 2$$

in cui i termini noti dipendono dalle variabili libere e la cui matrice dei coefficienti è la matrice triangolare superiore:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Pertanto il sistema triangolare ammette un'unica soluzione (cfr. 2.7) per ogni scelta arbitraria, ma fissata, di x_2, x_4, x_6 (è questo il motivo per cui queste variabili si chiamano *libere*). Con la risoluzione all'indietro si ottiene $\xi_5 = x_6 + 2$, $\xi_3 = 2x_4 - 2x_6 - 2$, $\xi_1 = x_2 - x_4 + 2x_6 + 1$. Le soluzioni del sistema a scala 2.9 sono quindi infinite e ciascuna è data da:

$$\xi_1 = x_2 - x_4 + 2x_6 + 1$$

$$\xi_2 = x_2$$

$$\xi_3 = 2x_4 - 2x_6 - 2$$

$$\xi_4 = x_4$$

$$\xi_5 = x_6 + 2$$

$$\xi_6 = x_6,$$

(2.9')

cioè si ottiene dalle formule scritte sostituendo esplicitamente valori numerici al posto delle variabili libere; per esempio se $x_2 = x_4 = x_6 = 0$ si ottiene la soluzione 1, 0, -2, 0, 2, 0. ♥

2.10 OSSERVAZIONE. Al posto del sistema 2.9 consideriamo il "sistema omogeneo associato" che ha la stessa matrice dei coefficienti ed i termini noti tutti nulli:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0$$

$$x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0,$$

$$x_5 - x_6 = 0$$

Ripetendo lo stesso ragionamento si tratta di risolvere all'indietro il sistema triangolare:

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4 + x_6$$

$$x_3 + x_5 = 2x_4 - x_6$$

$$x_5 = x_6$$

che dipende ancora dalle variabili libere x_2, x_4, x_6 . Per il sistema omogeneo proposto si ottengono quindi le soluzioni:

$$(2.10') \quad \begin{aligned} \mu_1 &= x_2 - x_4 + 2x_6 \\ \mu_2 &= x_2 \\ \mu_3 &= 2x_4 - 2x_6 \\ \mu_4 &= x_4 \\ \mu_5 &= x_6 \\ \mu_6 &= x_6. \end{aligned}$$

Se confrontiamo queste con le soluzioni (2.9') vediamo che esse hanno la stessa parte dipendente dalle variabili libere e le soluzioni di 2.9 si ottengono da quelle del sistema omogeneo associato 2.10 sommando dei coefficienti numerici che dipendono dai termini noti del sistema e forniscono la *soluzione particolare* 1, 0, -2, 0, 2, 0.. Questo fatto non è casuale, come vedremo in seguito (cfr. 5.18). ♡

Passiamo ora a formalizzare quanto visto negli ultimi esempi.

2.11 Definizione. *Un sistema lineare di r equazioni in n incognite, $r \leq n$, si dice di forma a scala se la sua matrice dei coefficienti è della forma:*

$$S' = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & p_1 & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_2 & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_3 & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & p_r & \dots & * \end{vmatrix}$$

dove i numeri $p_1, p_2, \dots, p_r$ sono tutti non nulli e prendono il nome di pivots della matrice a scala. ♣

In particolare se $r = n$ il sistema a scala si riduce ad un sistema triangolare superiore con i pivots sulla diagonale principale (e quindi ammette un'unica soluzione, per quanto visto nella proposizione 2.7).

La matrice S' non è la più generale *matrice a scala*, come vedremo nella prossima sezione; ma sarà la parte essenziale per la risoluzione dei sistemi.

Indichiamo con $j_1, j_2, \dots, j_r$ le colonne di S' in cui si trovano rispettivamente i pivots $p_1, p_2, \dots, p_r$. Nell'esempio 2.9 si ha $j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5$ ed i pivots sono $p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 1$. Spesso si avrà $j_1 = 1$; ma, come vedremo nell'esempio 2.14 è utile non porre a priori questa restrizione.

Supponiamo di avere un sistema a scala di r equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ e di matrice S' ; p_1 è il coefficiente dell'incognita x_{j_1} nella prima equazione del sistema, p_2 è il coefficiente dell'incognita x_{j_2} nella seconda equazione, p_r è il coefficiente dell'incognita x_{j_r} nell'ultima equazione. Le $n-r$ variabili residue prendono il nome di *variabili libere* (se $r = n$ non vi sono variabili di questo tipo) e possono essere raggruppate nel modo seguente:

1° gruppo: $x_1, x_2, \dots, x_{j_1-1},$

2° gruppo: $x_{j_1+1}, \dots, x_{j_2-1},$

(2.12)

$\vdots$

$(r+1)^{\text{mo}}$ gruppo: $x_{j_r+1}, \dots, x_n.$

2.13 Proposizione. *Un sistema a scala del tipo 2.11 ammette sempre soluzioni (qualunque sia il termine noto b). Se $r < n$ le soluzioni sono infinite, dipendenti da $n-r$ parametri liberi; se $r = n$ la soluzione è unica.*

Dim. Se $r = n$ il sistema è triangolare superiore ed è verificata la condizione della proposizione 2.7 quindi il sistema ammette un'unica soluzione.

Se $r < n$ seguiamo lo stesso procedimento usato per trovare le soluzioni dell'esempio 2.9: portando a secondo membro tutte le $n-r$ variabili libere si ottiene un sistema triangolare superiore di r equazioni nelle r incognite $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ del tipo:

$$p_1 x_{j_1} + \dots = d_1$$

$$p_2 x_{j_2} + \dots = d_2$$

$\dots$

$$p_r x_{j_r} = d_r,$$

dove d_r dipende dalle variabili libere dell' $(r+1)^{\text{mo}}$ gruppo e dal termine noto b_r del sistema a scala, d_{r-1} dipende dalle variabili libere dell' $(r+1)^{\text{mo}}$ e dell' r^{mo} e dal termine noto b_{r-1} , ..., d_1 dipende da tutti i gruppi tranne il primo e da b_1 .

Per ogni scelta di tali variabili libere il sistema triangolare ammette un'unica soluzione (cfr. 2.7) che può essere ricavata con la risoluzione

all'indietro:

$$\xi_{j_1} = f_1(2^\circ, \dots, (r+1)^{\text{mo}})$$

$$\xi_{j_2} = f_2(3^\circ, \dots, (r+1)^{\text{mo}})$$

$$\vdots$$

$$\xi_{j_r} = f_r((r+1)^{\text{mo}}),$$

dove $f_1, f_2, \dots, f_r$ sono funzioni di primo grado delle variabili libere i cui gruppi abbiamo brevemente indicato con $2^\circ, \dots, (r+1)^{\text{mo}}$.

Il sistema a scala ha quindi le soluzioni:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= x_1 \\
 &\vdots \\
 \xi_{j_1-1} &= x_{j_1-1} \\
 \xi_{j_1} &= f_1(2^\circ, \dots, (r+1)^{\text{mo}}) \\
 \xi_{j_1+1} &= x_{j_1+1} \\
 &\vdots \\
 \xi_{j_2-1} &= x_{j_2-1} \\
 &\vdots \\
 \xi_{j_2} &= f_2(3^\circ, \dots, (r+1)^{\text{mo}}) \\
 &\vdots \\
 \xi_{j_r} &= f_r((r+1)^{\text{mo}}) \\
 \xi_{j_r+1} &= x_{j_r+1} \\
 &\vdots \\
 \xi_r &= x_r
 \end{aligned}
 \tag{2.13'}$$

che dipendono dalle $n - r$ variabili libere. ♣

Se consideriamo il *sistema omogeneo* associato al sistema a scala della proposizione 2.13, cioè il sistema con la stessa matrice dei coefficienti e termini noti tutti nulli, per esso vale l'osservazione 2.10: *le soluzioni del sistema (non omogeneo) con termine noto $b \neq 0$ si ottengono da quelle del sistema omogeneo sommando dei coefficienti numerici (dipendenti da b) che ne forniscono una soluzione particolare.*

Vogliamo ora dare una giustificazione al fatto che per una matrice a scala (cfr. 2.11), non abbiamo fatto l'ipotesi che si abbia sempre $j_1 = 1$

2.14 ESEMPIO. Consideriamo il sistema lineare di due equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3 :

$$tx_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$tx_2 + 3x_3 = 0,$$

dove alcuni dei coefficienti dipendono dal numero reale (parametro) t . Le soluzioni di questo sistema dipendono quindi dal valore di t , oltre che dalle variabili libere.

Se $t \neq 0$ la matrice dei coefficienti ha la forma a scala:

$$\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & t & 3 \end{vmatrix}; \quad j_1 = 1, j_2 = 2; \quad p_1 = t, p_2 = t; \quad x_3 \text{ variabile libera}$$

e le soluzioni sono: $\xi_1 = (1/t)[(1 + 3/t)x_3 + 1]$, $\xi_2 = -(3/t)x_3$, $\xi_3 = x_3$.

Se $t = 0$ si ha invece la forma a scala:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad j_1 = 2, j_2 = 3; \quad p_1 = 1, p_2 = 3; \quad x_1 \text{ variabile libera}$$

e la soluzione è: $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 0$. Notiamo che essa non può essere ottenuta da quella valida per ogni altro valore del parametro t , sostituendo il valore $t = 0$! ♥

Il problema 2.5 nella sua forma generale verrà discusso nella prossima sezione, dove introdurremo il procedimento di “eliminazione di Gauss” che ora passiamo ad illustrare solo su alcuni esempi significativi. Per semplicità le incognite del sistema verranno indicate con x, y, z e una soluzione con la terna di numeri ξ, η, ζ .

2.15 ESEMPIO. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \end{aligned} \quad \text{con matrice} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Lo studente è abituato dalle scuole secondarie a tentare di risolvere un sistema sia effettuando delle sostituzioni, sia sommando o sottraendo equazioni eventualmente premoltiplicate per opportuni numeri. Proviamo a seguire questa seconda strada avendo in mente, con queste operazioni, di trasformare il sistema in uno che sia “più facile” da risolvere, per esempio portandolo alla forma a scala.

A questo scopo lasciamo inalterata la prima equazione; sostituiamo la seconda con l'equazione ottenuta sottraendo alla seconda la prima moltiplicata per 2; sostituiamo la terza equazione con quella ottenuta sottraendo alla terza la prima. Il risultato di tutto ciò è che si perviene al sistema:

$$(2.15)_1 \quad \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y &= -2 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned} \quad \text{con matrice} \quad A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Il sistema $(2.15)_1$ non è ancora nella forma a scala. Possiamo però iterare il procedimento: lasciamo inalterate le prime due equazioni e sostituiamo la terza con la differenza fra la terza e la seconda. Otteniamo il sistema:

$$(2.15)_2 \quad \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y & = & -2 \\ -2z & = & 1 \end{array} \quad \text{con matrice} \quad A_2 = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right|$$

che è di forma triangolare superiore (e quindi a scala) e con elementi sulla diagonale principale tutti non nulli. Per la proposizione 2.7 la soluzione di $(2.15)_2$ è unica. Con la risoluzione all'indietro si ottiene la soluzione $\xi = 7/2$, $\eta = -2$, $\zeta = -1/2$. $\heartsuit$

A questo punto è lecito porsi delle domande:

- La soluzione trovata per il sistema $(2.15)_2$ è anche soluzione del sistema (2.15) che volevamo risolvere?
- Ammettendo che a) abbia risposta affermativa, abbiamo trovato tutte le soluzioni di (2.15) ?
- Il procedimento usato funziona sempre?

La domanda a) ha risposta affermativa; una giustificazione generale verrà data nella prossima sezione. Nel caso di questo esempio però, avendo trovato esplicitamente una terna ordinata di numeri, possiamo controllare che essi forniscono una soluzione di (2.15) sostituendo nelle sue equazioni.

Alla domanda b) daremo ancora una risposta affermativa nella prossima sezione.

Per quanto concerne c) daremo fra breve esempi in cui il metodo deve essere leggermente modificato, ma consente sempre di dare risposta al problema 2.5.

2.16 OSSERVAZIONE. Siamo passati dal sistema (2.15) al sistema $(2.15)_1$ e al sistema $(2.15)_2$, ma in effetti avremmo potuto direttamente operare nello stesso modo sulla matrice dei coefficienti e sui termini noti invece che sulle equazioni. Partendo da:

$$(2.15') \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right| \quad \text{si ottiene} \quad (2.15')_1 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right|$$

ed infine:

$$(2.15')_2 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right|$$

Si può ora ricostruire il sistema $(2.15)_2$ a partire dalla matrice dei coefficienti e dai termini noti che sono stati disposti sull'ultima colonna. ♥

2.17 ESEMPIO. Consideriamo il sistema:

$$\begin{array}{l} x + 3y + z = 0 \\ 3x + 9y + 4z = 1, \\ 2x + y + 5z = 0 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right|,$$

e risolviamolo col metodo usato in 2.16 facendo uso solo della matrice dei coefficienti, cui è affiancata la colonna dei termini noti. Lasciamo inalterata la prima riga; sostituiamo alla seconda la differenza fra la seconda e la prima moltiplicata per 3; sostituiamo alla terza riga la differenza fra la terza e la prima moltiplicata per 2. Queste operazioni producono ovviamente sulla prima colonna, al di sotto di 1, due zeri:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array} \right|$$

A questo punto dobbiamo ripetere il procedimento sulla seconda e terza riga. Dovremmo sostituire la terza riga con la differenza fra la terza e la seconda moltiplicata per un opportuno moltiplicatore, allo scopo di ottenere 0 al posto di -5 ; questo è ovviamente impossibile! Sembra quindi che il procedimento non si possa effettuare; ma ciò non è vero! Infatti, *scambiando* la seconda con la terza equazione (cosa che lascia certamente immutato il sistema 2.17) e ripetendo il procedimento, otteniamo:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \end{array} \right|,$$

che corrisponde al sistema con le equazioni scambiate. Per produrre gli zeri voluti sulla prima colonna usiamo ordinatamente i moltiplicatori $\lambda_{21} = 2/1 = 2$ e $\lambda_{31} = 3/1 = 3$. Si ottiene:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \quad \text{cui corrisponde il sistema} \quad \begin{array}{l} x + 3y + z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \\ z = 1 \end{array}$$

che ammette un'unica soluzione $\xi = -14/5$, $\eta = 3/5$, $\zeta = 1$.

Lo studente avrà notato che abbiamo effettuato alcuni passaggi inutili ricominciando l'esercizio fin dall'inizio; quali? ♥

2.18 ESEMPIO. Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 4x + 6y - 2z &= 2 \\ x + (3/2)y - (1/4)z &= 1/2 \end{aligned} \quad \text{ovvero} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & 2 \\ 1 & 3/2 & -1/4 & 1/2 \end{array} \right| ,$$

e si operi come negli esempi precedenti. Per ottenere gli zeri voluti sulla prima colonna si devono usare rispettivamente i moltiplicatori $\lambda_{21} = 4/2 = 2$ e $\lambda_{31} = 1/2$. Effettuando i calcoli si ottiene:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{array} \right| .$$

A questo punto automaticamente si sono prodotti sulla seconda e terza riga una ulteriore colonna di zeri e lo *scambio* delle due righe lascia invariata la situazione. Passiamo allora alla terza colonna dove, con lo scambio della seconda e terza riga, si ottiene la matrice a scala ed il corrispondente sistema a scala di due equazioni in tre incognite:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| , \quad \begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 1/4z &= 0, \end{aligned}$$

(abbiamo omesso l'ultima equazione in quanto essa è l'identità $0 = 0$ che ammette come soluzioni qualunque scelta di numeri).

Abbiamo y come variabile libera e la risoluzione all'indietro fornisce come soluzioni le infinite terne di numeri $\xi = (1 - 3y)/2$, $\eta = y$, $\zeta = 0$, al variare di y nei numeri reali. $\heartsuit$

2.19 ESEMPIO. Vogliamo ora dare un esempio simile a 2.18 ma per il quale il sistema, trasformato con il metodo proposto, *non* ammette soluzioni. Rispetto al sistema precedente variamo solo i *termini noti*. La tabella iniziale è pertanto:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3/2 & -1/4 & 1/2 \end{array} \right| .$$

Gli stessi calcoli effettuati nell'esempio 2.18 danno ora:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| , \quad \text{cui corrisponde il sistema} \quad \begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ (1/4)z &= 0 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

In questo caso l'ultima equazione, che può anche scriversi $0x + 0y + 0z = 1$ non ammette soluzioni, e, come vedremo in seguito, il sistema 2.19 non ammette soluzioni.

Gli esempi precedenti devono convincere lo studente che per un sistema lineare di m equazioni in n incognite le soluzioni possono presentare le stesse eventualità del caso di una sola equazione in una sola incognita. L'avere un'unica soluzione dipende solo dalla matrice dei coefficienti (esempi 2.15 e 2.17); in caso contrario la presenza di infinite o nessuna soluzione viene a dipendere anche dai termini noti (esempi 2.18 e 2.19).

Va inoltre osservato che lo studio dei sistemi quadrati non porta alcun vantaggio semplificativo, perchè, come si è visto nell'esempio 2.18, spesso ci si riduce a risolvere un altro sistema che ha un numero di equazioni inferiore al numero delle equazioni del sistema iniziale.

-2.E Esercizi

1. Determinare, se esistono, soluzioni per il sistema:

$$2x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_2 + x_3 = 0$$

$$(1/2)x_3 = -1/8.$$

2. Determinare le soluzioni del seguente sistema a scala:

$$3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

3. Risolvere il seguente sistema a scala:

$$3x_1 - 2x_2 + (\log 3)x_3 - x_4 = 0$$

$$x_3 - 2x_4 = 0$$

4. Risolvere il seguente sistema:

$$2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0$$

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 1$$

$$x_4 + x_5 = 3$$

5. Discutere se il seguente sistema ammette una, infinite o nessuna soluzione:

$$2x - (1/\sqrt{2})y = 1$$

$$x - (\sqrt{2}/4)y = 1/2.$$

6. Verificare che il seguente sistema non ammette soluzioni:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 - (3/2)x_2 + (1/2)x_3 &= 1/2 \\ 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

3. IL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS E LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI COMPATIBILI

Ricordiamo innanzi tutto la seguente:

3.1 Definizione. Due sistemi lineari nelle incognite $x_1, \dots, x_n$ si dicono equivalenti se e solo se ammettono le stesse soluzioni. ♣

3.2 Definizione. Si considerino le due equazioni lineari del tipo:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n - \alpha = 0, \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n - \beta = 0.$$

Si chiama combinazione lineare delle due equazioni date con coefficienti (o pesi) h e k (numeri reali) l'equazione:

$$(3.3) \quad h(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - \alpha) + k(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n - \beta) = 0. \quad \clubsuit$$

L'equazione (3.3), sviluppata, ha come coefficienti ordinatamente $h\alpha_1 + k\beta_1, h\alpha_2 + k\beta_2, \dots, h\alpha_n + k\beta_n, -(h\alpha + k\beta)$. L'operazione di combinazione lineare di due equazioni con pesi h e k comporta di effettuare l'operazione di "combinazione lineare" sui coefficienti delle equazioni e con gli stessi pesi.

3.4 Lemma (fondamentale). I sistemi:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - \alpha &= 0 \\ \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n - \beta &= 0 \end{aligned}$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - \alpha &= 0 \\ k(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n - \beta) + h(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

sono equivalenti per ogni valore di h e per ogni valore di $k \neq 0$.

Dim. Proviamo innanzi tutto che ogni soluzione $\xi_1, \dots, \xi_n$ di (3.5) è anche soluzione di (3.6). L'ipotesi implica che sono verificate le due equazioni di (3.5) e valgono le eguaglianze numeriche:

$$i) \quad \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n - \alpha = 0, \quad ii) \quad \beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_n \xi_n - \beta = 0.$$

Sostituendo la soluzione in (3.6) si ottiene, tenuto conto di i) e ii): $k0 + h0 = 0$ che è verificata per ogni valore di h e k (la prima equazione di (3.6) è ovviamente verificata in quanto coincide con la prima di (3.5)).

Viceversa, supponiamo che $\xi_1, \dots, \xi_n$ sia soluzione di (3.6); ciò implica che:

$$j) \quad \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n - \alpha = 0,$$

$$jj) \quad k(\beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_n \xi_n - \beta) + h(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n - \alpha) = 0.$$

Sostituendo $j)$ in $jj)$ e tenuto conto che $k \neq 0$ otteniamo:

$$j') \quad \beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_n \xi_n - \beta = 0.$$

Le relazioni $j)$ e $j')$ dicono che $\xi_1, \dots, \xi_n$ è soluzione di (3.5). ♣

3.7 OSSERVAZIONE. Il sistema (3.6) è ottenuto da (3.5) sostituendo una delle equazioni con una combinazione lineare (di pesi h e k) delle due equazioni date. Questa "operazione elementare" non altera le soluzioni. Questo giustifica le risposte affermative date ai punti a) e b) alla fine dell'esempio 2.15, e che valgono anche per gli esempi successivi, dove abbiamo eseguito operazioni di questo tipo. ♥

Vogliamo dare ora risposta al problema 2.5, cioè dare un criterio operativo per riconoscere se un sistema è compatibile e, in caso affermativo, trovarne tutte le soluzioni.

Useremo un procedimento di *eliminazione di Gauss* che ha lo scopo di trasformare, facendo uso di operazioni elementari, il sistema dato in uno ad esso *equivalente* e con matrice dei coefficienti S di tipo $m \times n$ e di forma "a scala", cioè:

$$(3.8) \quad S = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & p_1 & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_2 & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & p_3 & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & p_r & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

dove si è brevemente indicato con $*$ gli elementi di matrice che non stiamo mettendo in evidenza; i *pivots* $p_1, p_2, \dots, p_r$ sono *tutti non nulli* e risulta $r \leq \min(m, n)$.

La (3.8) è la forma più generale di matrice a scala; rispetto alla matrice S' definita nella precedente sezione, se $r < m$ le ultime $m - r$

righe sono tutte nulle. Di questo tipo più generale sono le matrici cui siamo pervenuti nella discussione degli esempi 2.18 e 2.19.

Vogliamo ora esporre in modo formale il procedimento indicato per la risoluzione degli esempi della sezione precedente. Esso viene effettuato per *passi* successivi e prevede di riordinare più volte le equazioni del sistema inizialmente dato (cfr. esempio 2.17).

3.9. ELIMINAZIONE DI GAUSS. Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti A di tipo $m \times n$ e termine noto b .

1° PASSO. Si eseguano le seguenti istruzioni sulla matrice A e su b , ovvero sul sistema assegnato:

a_1) Si determini l'intero j_1 per cui nella matrice A almeno un elemento sulla colonna j_1 è non nullo e tutti gli elementi sulle colonne precedenti sono nulli. Si riordinino le equazioni del sistema dato, se necessario, in modo che nella prima equazione il coefficiente di x_{j_1} sia non nullo (in generale vi sarà arbitrarietà di scelta!) Effettuata questa scelta avremo il sistema "aggiornato" con il riordinamento eventuale delle equazioni, per il quale indichiamo rispettivamente con A' e b' la matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti:

$$A' = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2j_1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj_1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad b' = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}.$$

Il numero $p_1 = a_{1j_1} \neq 0$ è il 1° pivot.

b_1) Si calcolino i *moltiplicatori* $\lambda_{21} = a_{2j_1}/p_1$, $\lambda_{31} = a_{3j_1}/p_1, \dots, \lambda_{m1} = a_{mj_1}/p_1$.

c_1) A partire dalla matrice A' e dai termini noti b' si calcoli la matrice A_1 e la colonna di termini noti b_1 nel modo seguente:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \overset{j_1}{\downarrow} p_1 & \dots & a_{1t} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2t} - \lambda_{21} a_{1t} & \dots & a_{2n} - \lambda_{21} a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{mt} - \lambda_{m1} a_{1t} & \dots & a_{mn} - \lambda_{m1} a_{1n} \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 - \lambda_{21} b_1 \\ \vdots \\ b_m - \lambda_{m1} b_1 \end{vmatrix}.$$

Il 1° passo è così terminato. Con esso si è determinato un nuovo sistema di matrice A_1 e termine noto b_1 che è *equivalente* al sistema iniziale

in quanto è ottenuto da esso lasciando inalterata la prima equazione, sostituendo la seconda con la combinazione lineare della seconda e della prima con pesi 1 e $-\lambda_{21}, \dots$, sostituendo la m^{ma} , con la combinazione lineare della medesima e della prima, con pesi 1 e $-\lambda_{m1}$ (cfr. lemma 3.4 ed osservazione 3.7).

2° PASSO. Si eseguano le seguenti istruzioni sulla matrice A_1 e su b_1 , ovvero sul sistema, ottenuti alla fine del 1° passo.

$a_2)$ Si determini l'intero j_2 per cui nella matrice A_1 , a partire dalla seconda riga in poi, almeno un elemento sulla colonna j_2 è non nullo e tutti gli elementi sulle colonne precedenti sono nulli. Si riordinino le equazioni del sistema in esame, se necessario, in modo che nella seconda equazione il coefficiente di x_{j_2} sia non nullo. Effettuata questa scelta, il 2° pivot p_2 è il coefficiente di x_{j_2} nella seconda equazione del sistema "aggiornato" con il riordinamento eventuale delle equazioni, per il quale indichiamo rispettivamente con A'_1 e b'_1 la matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti.

$b_2)$ Si calcolino i moltiplicatori $\lambda_{32}, \lambda_{42}, \dots, \lambda_{m2}$ che si ottengono rispettivamente dai rapporti dei coefficienti della matrice A'_1 che si trovano sulla colonna j_2 , rispettivamente nella seconda, terza, ..., ultima riga, ed il pivot p_2 .

$c_2)$ Si consideri la matrice A_2 e la colonna di termini noti b_2 ottenuti da A'_1 e b'_1 rispettivamente lasciando inalterate le prime due righe e sostituendo la riga k^{ma} ($k = 3, \dots, m$) con la combinazione lineare della medesima e della seconda con pesi 1 e $-\lambda_{k2}$. La matrice A_2 è del tipo:

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} j_1 & j_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & \dots & 0 & p_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_2 & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * & * \end{array} \right| \end{array}.$$

Il 2° passo è così terminato. Con esso si è determinato un nuovo sistema di matrice A_2 e termine noto b_2 che è *equivalente* al sistema iniziale, in quanto è ottenuto da esso tramite operazioni elementari (cfr. lemma 3.4 ed osservazione 3.7).

⋮

i^{mo} PASSO. Si eseguano le seguenti istruzioni sulla matrice A_{i-1} e su b_{i-1} ottenuti all'($i-1$)^{mo} passo, ovvero sul corrispondente sistema.

$a_i)$ Si determini l'intero j_i per cui nella matrice A_{i-1} , a partire dalla i^{ma} riga in poi, almeno un elemento sulla colonna j_i è non nullo e tutti gli elementi sulle colonne precedenti sono nulli. Si riordinino le equazioni del sistema in esame, se necessario, in modo che nella i^{ma} equazione il coefficiente di x_{j_i} sia non nullo. Effettuata questa scelta l' i^{mo} pivot p_i è il coefficiente di x_{j_i} nella i^{ma} equazione del sistema "aggiornato" con il riordinamento eventuale delle equazioni, per il quale indichiamo rispettivamente con A'_{i-1} e b'_{i-1} la matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti.

$b_i)$ Si calcolino i moltiplicatori $\lambda_{i+1i}, \lambda_{i+2i}, \dots, \lambda_{mi}$ che si ottengono rispettivamente dai rapporti dei coefficienti della matrice A'_{i-1} che si trovano sulla colonna j_i , rispettivamente nella $(i+1)^{\text{ma}}, (i+2)^{\text{ma}}, \dots, m^{\text{ma}}$ riga ed il pivot p_i .

$c_i)$ Si consideri la matrice A_i e la colonna di termini noti b_i ottenuti da A'_{i-1} e b'_{i-1} rispettivamente lasciando inalterate le prime i righe e sostituendo la riga k^{ma} ($k = i+1, \dots, m$) con la combinazione lineare della medesima e della i^{ma} con pesi 1 e $-\lambda_{ki}$. La matrice A_i è del tipo:

$$A_i = \begin{vmatrix} 0 \dots 0 & p_1 & * \dots * & * & * \dots * & \dots & * & * & * \dots * \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & p_2 & * \dots * & \dots & * & * & * \dots * \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & \dots & * & * & * \dots * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & \dots & 0 & p_i & * \dots * \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & \dots & 0 & 0 & * \dots * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & \dots & 0 & 0 & * \dots * \end{vmatrix}$$

L' i^{mo} PASSO è così terminato ed il sistema di matrice A_i e termine noto b_i è *equivalente* al sistema iniziale.

Il procedimento di *eliminazione di Gauss* ha termine all' r^{mo} PASSO, quando nella corrispondente matrice A_r , se $r < m$, le ultime $m - r$ righe sono tutte nulle, oppure quando $r = m$. In ogni caso si ha $r \leq \min(m, n)$ e la matrice A_r è una matrice a scala del tipo (3.8) che verrà anche indicata con S . Se $r = m = n$ la matrice ottenuta è triangolare superiore con i pivots sulla diagonale principale e verrà anche denotata con T . Posto quindi $b_r = c$ abbiamo che:

3.10 Proposizione. *Il sistema di matrice S (oppure T) e termine noto c è equivalente al sistema di matrice A e termine noto b su cui abbiamo effettuato l'eliminazione di Gauss.*

3.11 OSSERVAZIONI CRITICHE. Il procedimento di eliminazione di Gauss si può applicare ad una qualunque *matrice* a prescindere dal fatto che essa sia o meno la matrice dei coefficienti di un sistema. Abbiamo visto infatti che i vari passi si effettuano sulle matrici che via via si producono e separatamente sui termini noti. Si parlerà quindi di *pivots di una matrice*.

Supponiamo di effettuare su una matrice A , di tipo $m \times n$, il procedimento di eliminazione di Gauss. Nel far questo vi è una larga arbitrarietà che deriva nel passo i^{mo} dalla operazione a_i) di riordino delle righe; questa scelta determina il valore dell' i^{mo} pivot. Pertanto i pivots di una matrice, o di un sistema, *non sono univocamente determinati*. Si consideri ad esempio la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se indichiamo con T la forma triangolare cui si perviene senza effettuare scambi di righe e con T' quella nel caso che si scambino le due righe, si ha:

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}, \quad T' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{vmatrix};$$

i pivots sono rispettivamente $p_1 = 1$, $p_2 = -3$ e $p'_1 = 2$, $p'_2 = 3/2$.

Certamente ad ogni passo dell'eliminazione avremmo potuto dare un *criterio di scelta* per l'operazione a_i). Avremmo potuto, per esempio, all' i^{mo} passo (per ogni $i = 1, \dots, r$) "scegliere fra le righe coinvolte la prima che ha il coefficiente di x_i diverso da zero". Ma ciò non è conveniente per il seguente motivo. Lo studente si sarà reso conto che il metodo di eliminazione è stato scritto tramite le istruzioni $a)$, $b)$, $c)$ che sono sempre dello stesso tipo ad ogni passo e che possono facilmente essere implementate su un computer tramite un programma.

Non staremo qui a discutere i problemi tecnici che sorgono nell'elaborazione di un programma di calcolo numerico; lo studente li vedrà in un corso di programmazione. In particolare vi sono i problemi relativi al "costo" del calcolo e quelli relativi alla "propagazione degli errori" (cfr. per esempio [B-C-M] dei testi consigliati).

Nel caso di sistemi lineari in generale influisce sul costo il numero n delle variabili che, in problemi concreti, può essere estremamente elevato. Si può facilmente verificare che, nell'algoritmo di Gauss su una matrice quadrata di ordine n , si effettuano approssimativamente $n^3/3$ "operazioni". Sulla propagazione degli errori influisce negativamente l'aver scelto un pivot molto prossimo a zero. Si può facilmente capire che la scelta sopra indicata non è conveniente; infatti i pivots scelti vengono usati in $b)$ come denominatori. Se un pivot è "molto prossimo" a zero un computer che usi floating numbers può approssimarlo a zero e non essere in grado di

3.11 OSSERVAZIONI CRITICHE. Il procedimento di eliminazione di Gauss si può applicare ad una qualunque *matrice* a prescindere dal fatto che essa sia o meno la matrice dei coefficienti di un sistema. Abbiamo visto infatti che i vari passi si effettuano sulle matrici che via via si producono e separatamente sui termini noti. Si parlerà quindi di *pivots di una matrice*.

Supponiamo di effettuare su una matrice A , di tipo $m \times n$, il procedimento di eliminazione di Gauss. Nel far questo vi è una larga arbitrarietà che deriva nel passo i^{mo} dalla operazione a_i) di riordino delle righe; questa scelta determina il valore dell' i^{mo} pivot. Pertanto i pivots di una matrice, o di un sistema, *non sono univocamente determinati*. Si consideri ad esempio la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se indichiamo con T la forma triangolare cui si perviene senza effettuare scambi di righe e con T' quella nel caso che si scambino le due righe, si ha:

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}, \quad T' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{vmatrix};$$

i pivots sono rispettivamente $p_1 = 1$, $p_2 = -3$ e $p'_1 = 2$, $p'_2 = 3/2$.

Certamente ad ogni passo dell'eliminazione avremmo potuto dare un *criterio di scelta* per l'operazione a_i). Avremmo potuto, per esempio, all' i^{mo} passo (per ogni $i = 1, \dots, r$) "scegliere fra le righe coinvolte la prima che ha il coefficiente di x_i diverso da zero". Ma ciò non è conveniente per il seguente motivo. Lo studente si sarà reso conto che il metodo di eliminazione è stato scritto tramite le istruzioni a_i), b_i), c_i) che sono sempre dello stesso tipo ad ogni passo e che possono facilmente essere implementate su un computer tramite un programma.

Non staremo qui a discutere i problemi tecnici che sorgono nell'elaborazione di un programma di calcolo numerico; lo studente li vedrà in un corso di programmazione. In particolare vi sono i problemi relativi al "costo" del calcolo e quelli relativi alla "propagazione degli errori" (cfr. per esempio [B-C-M] dei testi consigliati).

Nel caso di sistemi lineari in generale influisce sul costo il numero n delle variabili che, in problemi concreti, può essere estremamente elevato. Si può facilmente verificare che, nell'algoritmo di Gauss su una matrice quadrata di ordine n , si effettuano approssimativamente $n^3/3$ "operazioni". Sulla propagazione degli errori influisce negativamente l'aver scelto un pivot molto prossimo a zero. Si può facilmente capire che la scelta sopra indicata non è conveniente; infatti i pivots scelti vengono usati in b_i) come denominatori. Se un pivot è "molto prossimo" a zero un computer che usi floating numbers può approssimarlo a zero e non essere in grado di

effettuare b), o comunque lo inverte creando un errore molto grande. Per implementare tale programma sul computer è conveniente la seguente istruzione: "Si scelga, fra le righe coinvolte ad ogni passo, quella il cui coefficiente di x_i è in valore assoluto massimo". Questo può evitare l'inconveniente descritto sopra.

D'altra parte se lo studente esegue il procedimento a mano su un sistema a coefficienti interi, è conveniente scegliere, se possibile, pivots uguali ad 1; in questo modo non gli appariranno "frazioni indesiderate" come moltiplicatori! ♥

3.12 OSSERVAZIONE. A partire da un sistema lineare supponiamo di aver effettuato un certo numero di scambi di equazioni nei vari passi dell'eliminazione. Lo studente si convinca che, una volta noti questi scambi, avremmo potuto effettuarli tutti simultaneamente nel sistema iniziale. In questo caso l'eliminazione di Gauss potrebbe essere nuovamente effettuata senza necessità di scambi. ♥

A questo punto abbiamo chiarito che i pivots di un sistema o di una matrice dipendono dalle scelte fatte durante il procedimento di eliminazione. Si potrebbe pensare che per un ordinamento delle righe si ottengono r pivots e che con un ordinamento diverso se ne possano ottenere $r' \neq r$. Ciò è *falso*! Si ha infatti la seguente:

3.13 Proposizione. Se una matrice ammette r pivots per una scelta, nell'eliminazione di Gauss, dell'ordinamento delle righe, ogni altro ordinamento dà luogo allo stesso numero di pivots.

Per la dimostrazione si veda l'osservazione 4.8 del capitolo 2; osserviamo però che, proprio in virtù di essa, possiamo porre la seguente:

3.14 Definizione. i) Si chiama rango di una matrice A di tipo $m \times n$ il numero r dei pivots di una sua riduzione a scala S ottenuta con il metodo di eliminazione di Gauss. Risulta $r \leq \min(m, n)$, e si pone $rg(A) = r$.

ii) Una matrice quadrata A di ordine n si dice non singolare se $rg(A) = n$, cioè se ammette n pivots. In caso contrario A si dice singolare. ♣

3.15 ESERCIZIO. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & -2 \\ 6 & -9 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Al primo passo dell'eliminazione di Gauss su A si ha $j_1 = 1$ e non occorre effettuare scambi di righe, basta usare i moltiplicatori $\lambda_{21} = 4/2$ e

$\lambda_{31} = 6/2$ per ottenere la matrice

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Al secondo passo $j_2 = 3$ ed il moltiplicatore è $\lambda_{32} = 5/5 = 1$. Si ottiene la matrice a scala:

$$S = A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Pertanto $rg(A) = 2$.

Per la matrice B al primo passo si ha $j_1 = 1$ ma occorre effettuare uno scambio di righe; per esempio scambiando la prima con la terza si ha:

$$B' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_{21} = 2, \quad \lambda_{31} = 0, \quad B_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Al secondo passo risulta $j_2 = 2$ ed occorre scambiare in B_1 la seconda con la terza riga, ottenendo la matrice a scala (triangolare superiore):

$$T = B_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Pertanto si ha $rg(B) = 3$ e la matrice è non singolare. ♡

Siamo ora in grado di dare una risposta completa al problema 2.5 fornendo un criterio operativo per riconoscere la compatibilità di un sistema lineare e per la determinazione delle soluzioni.

3.16 Teorema. Sia A una matrice $m \times n$ e b un vettore ad m componenti. Il sistema di matrice A e termine noto b è compatibile se e solo se, detti S e c rispettivamente la matrice a scala e i termini noti ottenuti con un'eliminazione di Gauss, risulta: $c_{r+1} = 0, \dots, c_m = 0$, dove $r = rg(A)$.

In questo caso il sistema è equivalente ad un sistema a scala che ammette infinite soluzioni, dipendenti da $n - r$ parametri se $r < n$; ammette un'unica soluzione se $r = n$.

Dim. Ricordiamo che il procedimento di eliminazione di Gauss fornisce, all'ultimo passo, un sistema, equivalente al sistema iniziale, di matrice S e termine noto c . Le ultime $m - r$ equazioni (corrispondenti alle righe nulle di S) si riducono a: $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = c_{r+1}, \dots, 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = c_m$,

ed ammettono soluzioni se e solo se si riducono tutte all'identità $0 = 0$ (che è verificata per qualunque scelta delle incognite) ovvero se $c_{r+1} = 0, \dots, c_m = 0$. Le prime r equazioni danno luogo ad un sistema a scala (cfr. 2.11) e per la proposizione 2.13 si ha la tesi. Le soluzioni del sistema sono del tipo (2.13')

In particolare si ha il seguente:

3.17 Corollario. i) *Un sistema omogeneo di matrice A di tipo $m \times n$ (termine noto $b = 0$) è sempre compatibile. La soluzione $\xi = 0$ è unica se e solo se $\text{rg}(A) = n$.*

ii) *Un sistema quadrato $n \times n$ ammette una ed una sola soluzione se e solo se la matrice A dei coefficienti è non singolare.*

Vogliamo ora descrivere un metodo alternativo, ma del tutto equivalente alla risoluzione all'indietro, per trovare la soluzione di un sistema quadrato con matrice A non singolare (indipendentemente dal termine noto b).

3.18. ELIMINAZIONE DI GAUSS ALL'INDIETRO. Sia A una matrice quadrata non singolare. Il metodo di eliminazione di Gauss procede sulle righe di A dall'alto verso il basso ed opera, in questo caso, inizialmente sulla prima colonna, poi sulla seconda e così via, pervenendo ad una matrice T triangolare superiore che ha sulla diagonale principale elementi non nulli, gli n pivots. Avremmo potuto procedere (in modo del tutto simile) sulle righe di A dal basso verso l'alto ed operare prima sull'ultima colonna, poi sulla penultima e così via. Saremmo pervenuti ad una matrice triangolare inferiore. Simbolicamente indicheremo con $E.G. \downarrow$ il procedimento di eliminazione di Gauss descritto in dettaglio precedentemente, e con $E.G. \uparrow$ il procedimento all'indietro.

Supponiamo di partire quindi da un sistema quadrato di matrice A non singolare a termine noto b . L' $E.G. \downarrow$ produce un sistema equivalente di matrice T triangolare superiore e termine noto c . Se ora operiamo su T e c con l' $E.G. \uparrow$ otteniamo un sistema equivalente di matrice D e termine noto d . Osserviamo che questa seconda eliminazione di Gauss può essere effettuata senza scambi di righe perché gli elementi della diagonale di T sono i pivots (per ipotesi non nulli) e D è diagonale (i pivots di T si trovano sulla sua diagonale principale e tutti gli altri elementi sono nulli). Quindi l'ultimo sistema ottenuto è della forma:

$$p_1 x_1 = d_1, \quad p_2 x_2 = d_2, \quad \dots, \quad p_n x_n = d_n$$

e la soluzione del sistema iniziale si ottiene dividendo i termini noti $d_1, \dots, d_n$ per i rispettivi pivots. Il procedimento indicato, equivalente alla

risoluzione all'indietro, può essere simbolicamente riassunto in:

$$(3.19) \quad |A|b \xrightarrow{E.G.\downarrow} |T|c \xrightarrow{E.G.\uparrow} |D|d \xrightarrow[\text{i pivots}]{\text{divisione per}} |I|\xi$$

dove I è la *matrice identica* di ordine n , cioè la matrice i cui elementi sulla diagonale principale valgono 1 e tutti gli altri sono 0.

3.20 ESEMPIO. Riprendiamo in esame l'esempio 2.15 per il quale l' $E.G.\downarrow$ ha prodotto come matrice e termini noti rispettivamente:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right|$$

Applicando l' $E.G.\uparrow$ abbiamo che il primo passo dell'eliminazione usa i moltiplicatori $\lambda_{23} = 0$, $\lambda_{13} = -1/2$ e si ottiene:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right|$$

Al secondo passo dobbiamo usare il moltiplicatore $\lambda_{12} = 1$ e si ottiene:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right|$$

da cui si ricava la soluzione $\xi = 7/2$, $\eta = -2$, $\zeta = -1/2$. ♡

3.21 ESERCIZIO. Si consideri il seguente sistema lineare, dipendente dal parametro reale s :

$$\begin{array}{lcl} sx + y = 1 \\ -y + sz = s-1 \\ (1+s)x + y + z = 1 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} s & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & s & s-1 \\ 1+s & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

Determinare il rango della matrice A , dei coefficienti, al variare di s e vedere per quali valori del parametro il sistema è compatibile.

Procediamo con l'eliminazione di Gauss: per nessun valore di s la prima colonna è tutta nulla. Discutiamo innanzi tutto il caso $s \neq 0$: non occorre effettuare scambi di righe, si ha:

$$p_1 = s, \lambda_{21} = 0, \lambda_{31} = (1+s)/s, \quad \left| \begin{array}{ccc|c} s & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & s & s-1 \\ 0 & -1/s & 1 & -1/s \end{array} \right|$$

Al secondo passo si ottiene:

$$p_2 = -1, \lambda_{32} = 1/s, \quad \left| \begin{array}{ccc|c} s & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & s & s-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right|,$$

quindi, per ogni valore di $s \neq 0$, $rg(A_s)=2$ ed il sistema è incompatibile.

Nel caso $s = 0$ la matrice del sistema e la colonna dei termini noti sono:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|.$$

Occorre quindi effettuare nuovamente l'eliminazione di Gauss: dopo aver scambiato la prima con la terza riga, si passa direttamente al secondo passo e con il moltiplicatore $\lambda_{32} = -1$ si ottiene:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \text{e il sistema a scala} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 1. \end{array}$$

Pertanto, in questo caso, $rg(A_0) = 2$ ed il sistema è compatibile.

3.E Esercizi

1. Applicare il metodo di eliminazione di Gauss per determinare se i seguenti sistemi ammettono un'unica soluzione:

$$(a) \quad \begin{array}{l} 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 1/2 \end{array}$$

2. Decidere se i seguenti sistemi sono compatibili ed in caso affermativo determinarne le soluzioni:

$$(a) \quad \begin{array}{l} x + 2z = -1 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ 2x - y = 1. \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{l} u + v = 0 \\ 3u - 2v = 1 \\ 6u + v = 1 \\ u - 4v = 1. \end{array}$$

3. Trovare, se esistono, le soluzioni del sistema che ha come matrice dei coefficienti e termini noti rispettivamente:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

4. Risolvere i tre sistemi con matrice dei coefficienti A e termini noti rispettivamente $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

(Si consiglia di operare simultaneamente su tutti i termini noti, visto che la matrice dei coefficienti dei tre sistemi è la stessa!).

5. Determinare se le seguenti matrici sono o meno singolari:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

6. Verificare che per la seguente matrice A si possono ottenere pivots p_1, p_2, p_3 senza effettuare alcuno scambio di righe; siano poi p'_1, p'_2, p'_3 i pivots che si ottengono effettuando lo scambio della prima con la terza riga, verificare che $p_1 p_2 p_3 = -p'_1 p'_2 p'_3$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

7. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Determinare per quali valori del parametro reale t il seguente sistema risulta compatibile e trovarne le soluzioni:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + tx_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + t^3 x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

9.* Si consideri il sistema lineare:

$$2x + 3y - z = 0$$

$$x + 2y = 1$$

$$y - 2z = 3$$

a coefficienti interi. Applicare ad esso il metodo di eliminazione di Gauss e determinare se ammette o meno un'unica soluzione. In caso affermativo tale soluzione sarà costituita da una terna di numeri interi? Giustificare la risposta.

10.* Si consideri il sistema a coefficienti in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$:

$$2\sqrt{3}x + y = 0$$

$$(1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3}y = 2 + 5\sqrt{3}.$$

Provare, facendo uso dell'eliminazione di Gauss, che ammette un'unica soluzione costituita da una coppia di numeri di $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ e spiegarne il motivo.

4. SPAZI VETTORIALI NUMERICI SUI REALI

Ricordiamo che l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è munito delle due operazioni "binarie", la *somma* ed il *prodotto*, le quali godono di alcune proprietà (associativa, commutativa, distributiva, ... etc.) note allo studente dalle scuole secondarie; tali proprietà consentono le manipolazioni algebriche e le regole di calcolo con cui si opera sui numeri reali.

4.1 Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle n -uple (ordinate) di numeri reali: un elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è costituito da n numeri reali $x_1, x_2, \dots, x_n$ che chiameremo *componenti* del *vettore numerico* $\mathbf{x}$; scriveremo usualmente per colonna tali componenti:

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}.$$

Quest'ultima è ovviamente una convenzione; se ci riferiamo ad essa parleremo anche di *vettori colonna* di $\mathbb{R}^n$. Un'altra convenzione possibile è quella di scrivere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ come *vettore riga*: $\mathbf{x} = |x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n|$.

Nell'insieme $\mathbb{R}^n$ possiamo definire due operazioni (di natura diversa) nel modo seguente:

OPERAZIONE DI SOMMA. Ad ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ essa associa il vettore $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ definito da:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Questa è un'operazione *binaria interna*: binaria perché opera su coppie di elementi, interna perché sia gli elementi che il risultato appartengono allo stesso insieme $\mathbb{R}^n$.

OPERAZIONE DI PRODOTTO PER UNO SCALARE. Ad ogni numero reale (scalare) $\alpha \in \mathbb{R}$ e ad ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ essa associa il vettore $\alpha \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definito da:

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Questa è un'operazione *binaria* perché opera su due elementi, ma è *esterna* perché uno dei due elementi, lo scalare α , non appartiene all'insieme $\mathbb{R}^n$.

Le proprietà fondamentali di queste operazioni sono le seguenti:

4.2 Proprietà.

- I $\exists$ un vettore $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{o} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Esso si chiama vettore nullo ed ha tutte le componenti nulle (ovviamente è unico).
- II $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \exists$ un vettore $-\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{o}$. Esso si chiama vettore opposto di $\mathbf{x}$ ed ha per componenti gli opposti delle componenti di $\mathbf{x}$ (ovviamente è unico).
- III $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad \text{proprietà commutativa della somma.}$$
- IV $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \quad \text{proprietà associativa della somma.}$$
- V $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha: $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
- VI $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x}), \quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}.$$

VII $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

*proprietà distributiva della somma
rispetto al prodotto per uno scalare.*

Dim. La verifica delle proprietà è immediata vista la definizione delle due operazioni: esse altre non sono che le ben note proprietà della somma e del prodotto fra numeri reali (ripetute per ciascuna componente). ♣

Noi diciamo che $\mathbb{R}^n$ è ora munito di una struttura di *spazio vettoriale* su $\mathbb{R}$, o anche che è un *esempio di spazio vettoriale* su $\mathbb{R}$, proprio perché siamo riusciti ad introdurre nell'insieme $\mathbb{R}^n$ le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare (di $\mathbb{R}$), godenti delle proprietà 4.2.

Le proprietà I, ..., VII permettono di operare sui vettori di $\mathbb{R}^n$. Possiamo per esempio estendere la somma da due a più vettori e possiamo combinare le due operazioni nel modo seguente. Se $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ e se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ allora risulta:

$$(4.3) \quad w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \in \mathbb{R}^n.$$

Il vettore w si dice combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ con pesi (o coefficienti) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

4.4 ESEMPIO. La combinazione lineare, con pesi 1, 3, -2, dei vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$b_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{è il vettore} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix}. \quad \heartsuit$$

4.5 Definizione. Dato un insieme di vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ essi si dicono linearmente indipendenti se l'equazione:

$$(4.6) \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0,$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, ammette la sola soluzione $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Essi si dicono linearmente dipendenti se l'equazione (4.6) ammette anche altre soluzioni in cui i pesi non siano tutti nulli. ♣

4.7 ESEMPIO. Si considerino i vettori canonici di $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad e_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad e_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Essi sono linearmente indipendenti. Infatti in questo caso l'equazione (4.6):

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha_4 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

ammette l'unica soluzione $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. ♡

4.8 ESEMPIO. I vettori di $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x}$ di componenti 1, 2, -1 ed $\mathbf{y}$ di componenti 1/2, 1, -1/2, sono linearmente dipendenti. Infatti l'equazione (4.6') diviene:

$$\alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \text{cioè} \quad \begin{vmatrix} \alpha + (1/2)\beta \\ 2\alpha + \beta \\ -\alpha - (1/2)\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

ovvero il sistema $\alpha + (1/2)\beta = 0$, $2\alpha + \beta = 0$, $-\alpha - (1/2)\beta = 0$. Questo sistema omogeneo di tre equazioni in due incognite ammette infinite soluzioni in quanto, effettuando l'eliminazione di Gauss, si trova che $\text{rg}(A) = 1$ quindi il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da un parametro libero (cfr. 3.17 i)). ♡

4.9 OSSERVAZIONE. Supponiamo di aver assegnati k vettori di $\mathbb{R}^n$; due casi sono possibili, a norma della definizione 4.6: o essi sono indipendenti oppure dipendenti. La verifica di ciò è legata allo studio delle soluzioni dell'equazione (4.6) che di fatto è un *sistema omogeneo* di n equazioni nelle k incognite $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Tale sistema è sempre compatibile in quanto ammette la soluzione costituita dalla n -pla nulla. Si tratta quindi di vedere se la soluzione è unica oppure no (cfr. 3.17, i)). ♡

Fra i vari sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ ve ne sono alcuni importanti dal punto di vista delle operazioni.

4.10 Definizione. Un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice un sottospazio vettoriale se è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite in $\mathbb{R}^n$, cioè:

a) $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ deve risultare che $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$,

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{w} \in W$ deve risultare che $\alpha \mathbf{w} \in W$. ♣

Il sottoinsieme $W = \{\mathbf{o}\}$, costituito dal solo vettore nullo, è un sottospazio. Se $W \subset \mathbb{R}^n$ esso si dice un sottospazio *proprio*.

4.11 OSSERVAZIONE. Un sottospazio contiene sempre il vettore $\mathbf{o}$; infatti se $\mathbf{w} \in W$ si ha che $-1\mathbf{w} = -\mathbf{w} \in W$ e quindi $\mathbf{w} + (-\mathbf{w}) = \mathbf{o} \in W$. ♡

Diamo ora un procedimento per costruire sottospazi.

SOTTOSPAZIO GENERATO DA k VETTORI $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Si consideri il sottoinsieme:

$$W = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k, \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Al variare dei numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ si ottengono tutti gli elementi di W il quale contiene *infiniti* elementi se almeno uno dei vettori $\mathbf{v}_i$ è non nullo. In particolare W contiene il *sistema di generatori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ ($\mathbf{v}_1$ si ottiene per $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \dots = 0$, etc); il loro nome deriva dal fatto che essi generano i vettori di W per combinazione lineare.

4.12 Proposizione. $W = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Dim. Basta verificare le due proprietà a) e b) della definizione 4.10. Per la verifica di a) siano $\mathbf{w}_1 = b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_k \mathbf{v}_k$ e $\mathbf{w}_2 = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k$ elementi di W , per opportuni pesi $b_1, \dots, b_k$ e $c_1, \dots, c_k$. Si ha:

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_k \mathbf{v}_k + c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = (b_1 + c_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (b_k + c_k) \mathbf{v}_k.$$

Per effettuare questa somma si sono usate le proprietà VI e III. In ogni caso a) è verificata perché $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ è combinazione lineare dei generatori di W . Per la verifica di b) sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_k \mathbf{v}_k$, si ha $\alpha \mathbf{w} = \alpha(a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_k \mathbf{v}_k) = (\alpha a_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha a_k) \mathbf{v}_k$ che appartiene a W . ♣

4.13 ESEMPIO. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ di componenti rispettivamente 2, 1, 0 e -1, 3, 0. Allora:

$$\text{Span}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{w} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}\} = \left\{ \mathbf{w} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta \\ \alpha + 3\beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

al variare dei pesi α e β . Ci si può chiedere se $\text{Span}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è tutto $\mathbb{R}^3$. La risposta è no in quanto, al variare di α e β , i vettori che si ottengono hanno la terza componente nulla. ♡

4.14 Lo spazio vettoriale $M_{mn}(\mathbb{R})$. Vogliamo ora presentare un esempio di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ che solo apparentemente è diverso da $\mathbb{R}^n$. Fissiamo i numeri interi positivi m ed n ed indichiamo con $M_{mn}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici con m righe ed n colonne. In esso si può introdurre una struttura di spazio vettoriale definendo le due seguenti operazioni:

OPERAZIONE DI SOMMA (binaria interna):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{vmatrix}$$

OPERAZIONE DI PRODOTTO PER UNO SCALARE (binaria interna):

$$\alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{vmatrix}$$

Valgono anche qui le proprietà I, ..., VII perché di fatto stiamo operando sui numeri reali; in particolare la matrice *nulla*, indicata con 0, ha tutti gli elementi nulli. Si ottiene così un'altro esempio di spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.

4.15 OSSERVAZIONE Abbiamo detto che questo esempio è solo apparentemente diverso da $\mathbf{R}^n$. Infatti se ad ogni matrice $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$ associamo il vettore a di componenti $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ (che possiamo scrivere sia come vettore riga che come vettore colonna di $\mathbf{R}^{mn}$) vediamo che gli insiemi $M_{mn}(\mathbf{R})$ ed $\mathbf{R}^{mn}$ sono in corrispondenza biunivoca e si corrispondono anche le operazioni! Come spazi vettoriali sono in sostanza la stessa cosa o, come si dice, sono "*isomorfi*". Per questo motivo non illustreremo qui le solite nozioni, combinazione lineare, dipendenza ed indipendenza lineare, sottospazi. Sarebbe una inutile ripetizione.

Lo studente tenga presente negli esercizi che il passaggio dalle matrici ai vettori (colonna) è utile!

4.E Esercizi

1. Verificare che i vettori x di componenti 1,0,3 ed y di componenti -1, 0, -3 sono linearmente dipendenti.
2. Scrivere il vettore di $\mathbf{R}^4$ combinazione lineare, con pesi rispettivamente $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 0$, dei vettori:

$$v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad v_2 = \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix}, \quad v_3 = \begin{vmatrix} \log 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

3. Vedere se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad v_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad v_3 = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad v_4 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

4. Scrivere il vettore $v \in \mathbb{R}^4$, di componenti 1, 2, -1, 3, come combinazione lineare dei vettori e_1, e_2, e_3, e_4 dati nell'esempio 4.7.

5. Scrivere la combinazione lineare, con pesi rispettivamente $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1/2$, delle matrici:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

6. Si considerino le matrici elementari di $M_{23}(\mathbb{R})$:

$$e_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad e_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad e_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$e_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad e_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad e_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Verificare che ogni matrice $A \in M_{23}(\mathbb{R})$ si può scrivere in modo unico come loro combinazione lineare.

7. Vedere se le seguenti matrici sono dipendenti o indipendenti:

$$A_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. PRODOTTO FRA MATRICI E SUE PROPRIETÀ

Ci proponiamo ora di definire una nuova operazione fra matrici, che associ ad una coppia di matrici A e B una matrice $C = AB$. Questa operazione sarà possibile solo nel caso che il numero di colonne della matrice A sia uguale al numero di righe della matrice B . Vogliamo con questo dire che il prodotto AB sarà definito solo nel caso che A abbia tipo $m \times k$ e B abbia tipo $k \times n$.

5.1 NOTAZIONI Sia A una matrice di tipo $m \times n$. Ciascuna delle sue righe dà luogo ad un *vettore riga* ad n componenti e di tali vettori ne abbiamo esattamente m . Analogamente ciascuna delle sue colonne dà luogo ad un *vettore colonna* ad m componenti e ne abbiamo esattamente n . Esplicitamente data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

i suoi *vettori riga* sono dati da:

$$\mathbf{a}_1 = | a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} |, \mathbf{a}_2 = | a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n} |, \dots, \mathbf{a}_m = | a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn} |$$

i suoi *vettori colonna* sono dati da:

$$\mathbf{a}^1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{vmatrix}, \mathbf{a}^2 = \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{vmatrix}, \dots, \mathbf{a}^n = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{vmatrix}. \quad \heartsuit$$

Gli indici in basso ed in alto, che abbiamo usato per indicare rispettivamente i vettori riga ed i vettori colonna derivano da una "notazione tensoriale". Ci spiace di non poter dar qui una giustificazione sia del nome che del significato di ciò.

A seconda che si voglia evidenziare, nella matrice A , i suoi vettori riga o i suoi vettori colonna, scriveremo anche:

$$A = \begin{vmatrix} \text{---} & \mathbf{a}_1 & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{a}_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_m & \text{---} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \\ | & | & & | \end{vmatrix}.$$

Daremo la definizione di prodotto fra matrici attraverso i seguenti passi.

5.2 Definizione. **PRODOTTO DI UNA MATRICE $1 \times n$ PER UNA MATRICE $n \times 1$.** Esso è definito da:

$$| a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n | \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad \clubsuit$$

Il risultato è una matrice 1×1 (cioè un numero, come diremo anche con abuso di linguaggio); abbiamo ommesso le sbarre che indicano di solito la matrice, per non confondere una tale matrice (di ordine 1) con il valore assoluto del suo unico elemento.

In questo modo abbiamo definito il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna con lo stesso numero di componenti.

5.3 Proprietà.

$$|a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n| \left(\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} \right) = |a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n| \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix} + |a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n| \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix}.$$

Dim. Basta effettuare i calcoli a primo e a secondo membro. Il tutto si riduce alla proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto ed alle proprietà commutativa ed associativa della somma dei numeri reali. ♣

5.4 Definizione. PRODOTTO DI UNA MATRICE A DI TIPO $m \times n$, PER UNA MATRICE x DI TIPO $n \times 1$ (VETTORE COLONNA). Usiamo la notazione 5.1 per la matrice A e definiamo il prodotto Ax come il vettore colonna, ad m componenti, dato da:

$$Ax = \begin{vmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ \text{---} & a_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_m & \text{---} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_1 x \\ a_2 x \\ \vdots \\ a_m x \end{vmatrix}.$$

Il vettore colonna Ax ha per componente i^{ma} il prodotto dell' i^{mo} vettore riga di A per il vettore x , secondo la definizione 5.2.

5.5 OSSERVAZIONE (FONDAMENTALE). Se esplicitiamo il calcolo otteniamo:

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{vmatrix} \\ &= x_1 \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{vmatrix} + \dots + x_n \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{vmatrix} = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n. \end{aligned}$$

In definitiva: il prodotto di una matrice per un vettore uguaglia la combinazione lineare dei vettori colonna della matrice con pesi le coordinate

del vettore. ♡

5.6 Proprietà. $A(x + y) = Ax + Ay$, $A(\alpha x) = \alpha(Ax)$.

Dim. Sono immediate, basta far uso a primo e a secondo membro della precedente osservazione fondamentale. ♣

5.7 Definizione. **PRODOTTO DI UNA MATRICE A DI TIPO $m \times k$ PER UNA MATRICE B DI TIPO $k \times n$.** Per la matrice A mettiamo in evidenza gli m vettori riga e per la matrice B mettiamo in evidenza gli n vettori colonna, (cfr. notazione 5.1); tutti questi vettori hanno k componenti. Poniamo per definizione:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ \text{---} & a_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_m & \text{---} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ b^1 & b^2 & \dots & b^n \\ | & | & & | \end{array} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 b^1 & a_1 b^2 & \dots & a_1 b^n \\ a_2 b^1 & a_2 b^2 & \dots & a_2 b^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b^1 & a_m b^2 & \dots & a_m b^n \end{array} \right],$$

dove $a_i b^j$ è l'elemento di posto i, j nella matrice prodotto ed è definito da 5.2. ♣

La matrice che ne risulta è di tipo $m \times n$. Abbiamo così dato la definizione generale di prodotto fra matrici. Esso si chiama anche "prodotto righe per colonne" ed il motivo è ovvio dalla definizione 5.7.

Avvertiamo subito che questo non è l'unico modo di definire un prodotto fra matrici; ve ne sono altri, ad esempio il prodotto "righe per righe", o quello "colonne per colonne" etc. La scelta che abbiamo fatto determinerà le proprietà algebriche che seguono; gli altri prodotti non posseggono invece buone proprietà.

5.8 OSSERVAZIONE. La colonna i^{ma} della matrice AB è il vettore colonna Ab^i prodotto della matrice A per il vettore colonna b^i di B (cfr. 5.4). Pertanto la colonna i^{ma} del prodotto dipende dalla matrice A (che è il primo fattore) e dalla sola colonna i^{ma} di B (che è il secondo fattore). La riga i^{ma} del prodotto AB è il vettore riga $a_i B$ ottenuto moltiplicando nell'ordine la matrice a_i (di tipo $1 \times k$) per la matrice B (di tipo $k \times n$). Possiamo quindi scrivere:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ Ab^1 & Ab^2 & \dots & Ab^n \\ | & | & & | \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{---} & a_1 B & \text{---} \\ \text{---} & a_2 B & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_m B & \text{---} \end{array} \right].$$

♡

5.9 Proprietà. Supponiamo che le righe e le colonne delle matrici A , B , x siano tali che si possa effettuare il prodotto $(AB)x$. Allora si ha:

$$(AB)x = A(Bx).$$

Dim*. Calcoliamo separatamente il vettore a primo e a secondo membro.

$$(AB)x = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \text{---} & a_1 & \text{---} & & & \\ \text{---} & a_2 & \text{---} & & & \\ & \vdots & & & & \\ \text{---} & a_m & \text{---} & & & \end{array} B \right) x = \begin{array}{ccc|ccc} \text{---} & a_1 B & \text{---} & & & \\ \text{---} & a_2 B & \text{---} & & & \\ & \vdots & & & & \\ \text{---} & a_m B & \text{---} & & & \end{array} x = \begin{array}{c} (a_1 B)x \\ (a_2 B)x \\ \vdots \\ (a_m B)x \end{array},$$

$$A(Bx) = \begin{array}{ccc|ccc} \text{---} & a_1 & \text{---} & & & \\ \text{---} & a_2 & \text{---} & & & \\ & \vdots & & & & \\ \text{---} & a_m & \text{---} & & & \end{array} \left(\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} Bx \right) = \begin{array}{c} a_1(Bx) \\ a_2(Bx) \\ \vdots \\ a_m(Bx) \end{array}.$$

La tesi è provata non appena avremo verificato l'uguaglianza delle componenti omonime dei due vettori, cioè $(a_i B)x = a_i(Bx)$. In definitiva dobbiamo provare che $(yB)x = y(Bx)$ per una matrice B di tipo $k \times n$ e per i vettori:

$$y = |y_1 \quad \dots \quad y_k|, \quad x = \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}.$$

Questa identità si verifica con un calcolo esplicito.

$$|y_1 \quad \dots \quad y_k| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{array} = (b_{11}y_1 + \dots + b_{k1}y_k) \dots (b_{1n}y_1 + \dots + b_{kn}y_k)$$

$$\begin{aligned} (yB)x &= x_1(b_{11}y_1 + \dots + b_{k1}y_k) + \dots + x_n(b_{1n}y_1 + \dots + b_{kn}y_k) = \\ &= y_1(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n) + \dots + y_k(b_{k1}x_1 + \dots + b_{kn}x_n) = y(Bx), \end{aligned}$$

infatti il vettore colonna Bx è dato da:

$$Bx = \begin{array}{c} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + \dots + b_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_{k1}x_1 + \dots + b_{kn}x_n \end{array}.$$

Vogliamo ora elencare le proprietà fondamentali del prodotto fra matrici:

5.10 Proprietà. Per ogni terna di matrici A, B, C , per cui sono definite le operazioni indicate, valgono le seguenti uguaglianze:

- a) $A(B + C) = AB + AC$, proprietà distributive della
 $(B + C)A = BA + CA$, somma rispetto al prodotto;
- b) $(AB)C = A(BC)$, proprietà associativa del prodotto.

Dim.* Per a) basta controllare che le due matrici a primo e a secondo membro abbiano gli stessi vettori colonna. La j^{ma} colonna di $A(B + C)$ è data da $A(b^j + c^j)$, dove b^j e c^j sono rispettivamente la j^{ma} colonna di B e C . Per la proprietà 5.6 si ha $A(b^j + c^j) = Ab^j + Ac^j$, cioè la j^{ma} colonna di $AB + AC$. L'altra uguaglianza è simile; lo studente può facilmente controllare che le due matrici hanno lo stesso elemento di posto i, j . Per b) controlliamo che le due matrici a primo e a secondo membro hanno gli stessi vettori colonna. Il j^{mo} vettore colonna in $(AB)C$ è dato da $(AB)c^j = A(Bc^j)$ (cfr. proprietà 5.9). Essendo Bc^j il j^{mo} vettore colonna di BC segue che $A(Bc^j)$ è il j^{mo} vettore colonna del prodotto $A(BC)$. ♣

Lo studente avrà notato che il prodotto fra matrici gode di proprietà "formalmente" analoghe al prodotto fra numeri reali. Sarà quindi meravigliato che non abbiamo scritto la *proprietà commutativa* $AB = BA$ del prodotto fra matrici. Perché ciò sia possibile occorre innanzi tutto che le matrici siano *quadrato e dello stesso ordine*. Ciò nonostante l'uguaglianza in generale *non vale*! Per provare ciò basta esibire due opportune matrici che non commutino. Per esempio:

$$AB = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}; \quad BA = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

ed è inutile continuare il calcolo! $AB \neq BA$ perché non hanno lo stesso elemento di posto 1,1 !

5.11 OSSERVAZIONE. Dire che la proprietà commutativa "non vale" non vuol dire che il prodotto fra matrici non commuti mai. Alcune coppie di matrici commutano fra loro; per esempio la matrice nulla commuta con ogni altra matrice. Vedremo fra breve altri esempi. L'affermazione "non vale" deve essere intesa in modo corretto, cioè "non vale sempre"! ♥

Nell'insieme $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici (quadrato) di ordine n si può sempre eseguire il prodotto di due matrici; inoltre abbiamo un elemento speciale, detto *matrice identità*, definita da:

$$I = I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

I vettori riga di $I \in M_n(\mathbb{R})$ sono i vettori di $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = |1 \ 0 \ \dots \ 0|, \dots, e_i = |0 \ \dots \ 0 \underset{i}{1} \ 0 \ \dots \ 0|, \dots, e_n = |0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1|.$$

I suoi vettori colonna $e^1, e^2, \dots, e^n$ sono esattamente gli stessi, con le coordinate scritte per colonna. Essi si chiamano i *vettori canonici* di $\mathbb{R}^n$. La proprietà fondamentale della matrice identità è che risulta:

$$(5.12) \quad IA = AI = A$$

per ogni matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$. In particolare la matrice identica commuta con tutte le matrici di $M_n(\mathbb{R})$.

Vogliamo introdurre alcune matrici di tipo speciale ed illustrare il loro comportamento rispetto al prodotto.

$\begin{vmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha_1 & & & \\ * & \alpha_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ * & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \dots & 1 \end{vmatrix}$
matr. scalare	matr. diagonale	matr. triangolare inferiore	matr. triang. inf. unipotente

È facile verificare, facendo uso della definizione, le seguenti:

5.13 PROPRIETÀ

- 1) Una matrice scalare commuta con qualunque matrice.
- 2) Il prodotto di due matrici diagonali è una matrice diagonale.
- 3) Il prodotto di due matrici triangolari inferiori (o unipotenti) è una matrice dello stesso tipo. ♣

Prima di terminare questa sezione vogliamo dare una prima relazione fra i sistemi lineari e gli spazi dei vettori numerici, le matrici ed i loro prodotti. Infatti il sistema lineare (2.4) può essere scritto, facendo uso del prodotto fra matrici, nella *forma compatta* (cfr. 5.5):

$$(5.14) \quad Ax = b, \quad \text{dove } A \in M_{mn}(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Il sistema è compatibile se e solo se esiste un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$ tale che: $A\xi = b$ e quindi, tenuto conto di 5.5, si ha:

5.15 Proposizione. Il sistema lineare $Ax = b$ è compatibile se e solo se $b \in \text{Span}(a^1, \dots, a^n)$ dove $a^1, \dots, a^n$ sono i vettori colonna di A . ♣

5.16 ESEMPIO. Consideriamo ancora il sistema lineare dell'esempio 2.9 e la soluzione $\xi \in \mathbb{R}^6$, data da (2.9') e dipendente dalle variabili libere x_2, x_4, x_6 , può essere riscritta facendo uso dell'operazione di combinazione lineare in $\mathbb{R}^6$:

$$\xi = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_4 + 2x_6 + 1 \\ x_2 \\ 2x_4 - 2x_6 - 2 \\ x_4 \\ x_6 + 2 \\ x_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_4 \\ 0 \\ 2x_4 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x_6 \\ 0 \\ -2x_6 \\ 0 \\ x_6 \\ x_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= x_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_6 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = x_2 v_2 + x_4 v_4 + x_6 v_6 + \xi_0.$$

Con un semplice artificio algebrico (raccogliendo cioè i termini dipendenti dalla stessa variabile ed i termini noti), abbiamo scritto tutti i vettori soluzione del sistema come *combinazione lineare* di vettori numerici v_2, v_4, v_6, ξ_0 e con pesi le "variabili libere" x_2, x_4, x_6 , ed il numero 1. Osserviamo inoltre che il vettore v_2 ha la seconda componente uguale ad 1 e le successive tutte nulle, v_4 ha la quarta componente uguale ad 1 e le successive tutte nulle, v_6 ha la sesta componente uguale ad 1. Tenendo presente l'osservazione 2.10 abbiamo, per il sistema omogeneo associato, le soluzioni: $\mu = x_2 v_2 + x_4 v_4 + x_6 v_6$. ♥

Quanto abbiamo messo in evidenza con riferimento all'esempio 2.9 è del tutto generale. Se un sistema è compatibile esso è equivalente ad un sistema a scala del tipo 2.11 le cui soluzioni (2.13') possono essere scritte vettorialmente separando i contributi delle singole $n-r$ variabili libere e quelli dei coefficienti numerici, ottenendo:

$$(5.17) \quad \xi = x_1 v_1 + \dots + x_{j_1-1} v_{j_1-1} + x_{j_1+1} v_{j_1+1} + \dots + x_n v_n + \xi_0;$$

le soluzioni del sistema omogeneo associato sono date da:

$$(5.17') \quad \mu = x_1 v_1 + \dots + x_{j_1-1} v_{j_1-1} + x_{j_1+1} v_{j_1+1} + \dots + x_n v_n,$$

dove i vettori $v_1, \dots, v_{j_1-1}, v_{j_1+1}, \dots, v_n$ sono *vettori numerici* che godono della seguente proprietà: v_k ha la coordinata k^{ma} uguale ad 1 e le successive tutte nulle.

Il sottoinsieme Δ delle soluzioni del sistema omogeneo associato è il sottospazio $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j_1-1}, \mathbf{v}_{j_1+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$. Dalle (5.17) e (5.17') si ottiene quindi il seguente *teorema di struttura* delle soluzioni di un sistema compatibile:

5.18 Teorema Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema compatibile di m equazioni in n incognite.

- a) l'insieme Δ dei vettori soluzione del sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è un sottospazio.
 b) Detto Δ' l'insieme dei vettori soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta:

$$\Delta' = \Delta + \xi_0$$

dove ξ_0 è una soluzione (particolare) del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ♣

5.E Esercizi

1. Calcolare il vettore $A\mathbf{x}$, dove:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{vmatrix}.$$

2. Scrivere il vettore $\mathbf{w} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ come prodotto di una matrice per un vettore, sapendo che:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

3. Calcolare il prodotto ABC e verificare l'associatività:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Calcolare, se possibile, il prodotto AB per le seguenti matrici:

$$(a) \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(b) \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Calcolare, se possibile, la seconda riga e la terza colonna della matrice prodotto AB , dove:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Vedere se le seguenti matrici commutano:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Calcolare i prodotti AB e BA per le matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Calcolare i prodotti AB e BA per le matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & 1/2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

9. Verificare che per ogni matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ risulta $AB = BA$, dove:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

10. Sia $P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ e sia A una qualunque matrice di $M_3(\mathbb{R})$.

Calcolare i prodotti PA ed AP . In che modo è ottenuta la matrice P a partire dalla matrice identica? In che modo è ottenuta la matrice PA e la AP a partire dalla matrice A ?

11. Verificare l'uguaglianza:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{---} & \mathbf{a}_1 & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{a}_2 & \text{---} \\ \text{---} & \vdots & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{a}_n & \text{---} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{---} & \alpha_1 \mathbf{a}_1 & \text{---} \\ \text{---} & \alpha_2 \mathbf{a}_2 & \text{---} \\ \text{---} & \vdots & \text{---} \\ \text{---} & \alpha_n \mathbf{a}_n & \text{---} \end{vmatrix}.$$

12. Per il sistema assegnato in 3.E, esercizio 3, e per il sistema omogeneo associato, scrivere le soluzioni nella forma (5.17).

6. MATRICI INVERTIBILI: UN ALGORITMO DI CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA

Lo studente avrà notato che, formalmente, la matrice I (cfr. 5.12) gode della stessa proprietà del numero 1 fra i numeri reali! Per ogni numero reale $a \neq 0$ esiste ed è unico l'inverso, indicato con $a^{-1} (\in \mathbb{R})$ che gode della proprietà: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

6.1 Definizione. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice invertibile se esiste una matrice, detta matrice inversa di A ed indicata con $A^{-1} (\in M_n(\mathbb{R}))$, tale che:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \quad \clubsuit$$

6.2 PROBLEMA. Quali matrici quadrate sono invertibili? ♥

In $\mathbb{R}$, che può essere pensato come l'insieme $M_1(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 1, il numero 0 non è invertibile! Non ci si può quindi aspettare che tutte le matrici quadrate siano invertibili! La risposta al problema proposto sarà data fra breve. È facile comunque dare esempi di matrici invertibili: l'inversa della matrice identità I è la matrice I stessa, l'inversa di una matrice scalare relativa al numero $\alpha \neq 0$ è la matrice scalare relativa al numero $1/\alpha$; una matrice diagonale che abbia rispettivamente sulla diagonale i numeri $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tutti non nulli, ha per inversa la matrice diagonale che ha sulla diagonale i reciproci $1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n$.

6.3 Proposizione. Se la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile, la sua inversa è unica.

Dim. Supponiamo che A possenga due inverse, indicate con A^{-1} e B , godenti quindi delle proprietà:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I, \quad AB = BA = I.$$

Da ciò si deduce che $AA^{-1} = AB$; moltiplicando a sinistra entrambi i membri per A^{-1} si ottiene $A^{-1}(AA^{-1}) = A^{-1}(AB)$ ed usando la proprietà associativa del prodotto $(A^{-1}A)A^{-1} = (A^{-1}A)B$. Per la 6.1 e la 5.12 si ricava $A^{-1} = B$. ♣

6.4 OSSERVAZIONE. Nella dimostrazione precedente abbiamo usato entrambe le uguaglianze di 6.1 per la matrice A^{-1} ma solo la relazione

$AB = I$ per la matrice B ; per quest'ultima abbiamo quindi usato la sola proprietà di essere una "inversa destra" di A . ♡

Abbiamo qui un esempio di dimostrazione in cui abbiamo fatto uso delle proprietà formali del prodotto fra matrici, così come si fa per i numeri reali. È di fatto questa l'importanza delle proprietà dimostrate! Esse permettono di effettuare il calcolo fra matrici come fra i numeri reali con la sola avvertenza di non usare la proprietà commutativa, a meno che non si sappia a priori che le matrici in esame commutino. Altre proposizioni della stessa natura sono le seguenti.

6.5 Proposizione. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono entrambe invertibili, allora il loro prodotto AB è invertibile e si ha:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Dim. Basta verificare che $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Usando la proprietà associativa si ha infatti $B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(IB) = B^{-1}B = I$. Analogamente si verifica che $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. ♣

6.6 Proposizione. Se A è invertibile anche A^{-1} è invertibile e risulta $(A^{-1})^{-1} = A$.

Dim. È immediata e lasciata allo studente. ♣

Lo studente attento si porrà certamente il seguente problema: se $AX = I$ è anche vero che $XA = I$? In altri termini, se X è una inversa destra di A , è anche una sua inversa sinistra? In effetti ciò è vero per le matrici quadrate ma non è un fatto formale.

Ciò che invece si può dedurre dalle proprietà formali è la seguente:

6.7 Proposizione. $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se esiste un'unica inversa destra, cioè un'unica matrice X tale che $AX = I$.

Dim.* Se A è invertibile A^{-1} è l'unica inversa destra (cfr. 6.3 e 6.4). Viceversa se $AX = I$ con X unica, si ha $0 = AX - I$ e quindi:

$$0 = (AX - I)A = AXA - A = A(XA - I).$$

Pertanto $I = AX = AX + A(XA - I) = A(X + XA - I)$. Per l'unicità dell'inversa destra deve aversi $X = X + XA - I$, da cui $XA - I = 0$ cioè la tesi. ♣

Faremo uso di questa proposizione per dare risposta al problema 6.2.

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice assegnata e sia $X \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice (incognita) i cui vettori colonna indichiamo con $x^1, x^2, \dots, x^n$. La condizione necessaria e sufficiente affinché X sia inversa destra di A e sia unica è che valga la relazione:

$$(6.8) \quad AX = I,$$

ovvero che valgano simultaneamente le relazioni:

$$(6.9) \quad Ax^1 = e^1, Ax^2 = e^2, \dots, Ax^n = e^n,$$

con vettori $x^1, x^2, \dots, x^n$ unici.

Le (6.9) ci dicono quindi che:

$$(6.10) \quad \begin{array}{l} x^1 \text{ deve essere l'unica soluzione del sistema quadrato } Ax = e^1, \\ x^2 \text{ deve essere l'unica soluzione del sistema quadrato } Ax = e^2, \\ \vdots \\ x^n \text{ deve essere l'unica soluzione del sistema quadrato } Ax = e^n, \end{array}$$

Pertanto una inversa destra X di A esiste ed è unica se e solo se la matrice A è non singolare (cfr. teorema 3.17). Abbiamo così provato che:

6.11 Teorema. *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e soltanto se essa è non singolare.* ♣

Come applicazione di quanto appena visto, abbiamo le seguenti proposizioni

6.12 Proposizione. *Sia $Ax = b$ un sistema quadrato con matrice dei coefficienti non singolare. L'unica soluzione è allora data da $\xi = A^{-1}b$.*

Dim. La dimostrazione è di tipo formale. Poiché esiste la matrice inversa di A possiamo moltiplicare a sinistra l'uguaglianza $A\xi = b$ per A^{-1} ; associando il prodotto $A^{-1}A = I$ si ottiene la tesi. ♣

6.13 Proposizione. *La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è singolare se e solo se esiste un vettore $\xi \neq 0$ tale che $A\xi = 0$.*

Dim. Il sistema $Ax = 0$ ammette sempre la soluzione banale 0 . La matrice A è singolare se e solo se il sistema ammette parametri liberi, cioè se e solo se esiste una soluzione non nulla. ♣

6.14 UN ALGORITMO DI CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA. Sia A una matrice non singolare, per determinare la matrice $X = A^{-1}$ dobbiamo risolvere simultaneamente i sistemi di (6.10) che hanno tutti la stessa matrice dei coefficienti. Possiamo quindi operare l'E.G.↓ simultaneamente sulla matrice A e sui termini noti $e^1, e^2, \dots, e^n$ che, affiancati, forniscono la matrice identica. Otterremo n sistemi triangolari superiori che intendiamo risolvere con l'E.G.↑ (cfr. (3.18)). Il procedimento da effettuare è quindi

il seguente:

$$|A|I| \xrightarrow{E.G.\downarrow} |T|B| \xrightarrow{E.G.\uparrow} |D|C| \xrightarrow[\text{i pivots}]{\text{divisione per}} |I|A^{-1}|$$

dove si è indicata con B la matrice i cui vettori colonna sono i termini noti dei sistemi in forma triangolare superiore, con C quella i cui vettori colonna sono i termini noti dei sistemi in forma diagonale.

6.15 ESERCIZIO. *Determinazione dell'inversa della matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Applicando l' $E.G.\downarrow$ alla matrice data ed alla matrice identica (dei termini noti) si ottiene:

$$|A|I| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = |T|B|.$$

Applicando l' $E.G.\uparrow$ a T si ottiene

$$|D|C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -4 & | & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dividendo le righe per i corrispondenti pivots si ottiene:

$$|I|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5/4 & -3/4 & -1/4 \end{vmatrix},$$

da cui si legge la matrice inversa.



6.E Esercizi

1. Verificare che le inverse delle matrici:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \text{ sono rispettivamente } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}.$$

2. Vedere se ciascuna delle seguenti matrici è invertibile facendo uso dell'eliminazione di Gauss e in caso affermativo determinarne l'inversa:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Calcolare, se possibile, la soluzione del seguente sistema facendo uso della proposizione 6.12:

$$x + y - z = 1$$

$$x + z = 2$$

$$-y + z = 3.$$

4. Provare che le matrici A e B sono una inversa dell'altra:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

7*. FORMA MATRICIALE DELL'ELIMINAZIONE DI GAUSS. LA FATTORIZZAZIONE $PA = LDU$ PER UNA MATRICE A NON SINGOLARE

In questa sezione vogliamo descrivere il procedimento di eliminazione di Gauss in termini di prodotti di matrici.

Ricordiamo che tale procedimento prevede di operare su una matrice sia con la sostituzione di una riga con la somma della medesima e di un'altra riga moltiplicata per un coefficiente, sia con scambi di righe. Vediamo quindi come si possono tradurre questi due tipi di operazioni in termini di prodotti di matrici.

Fra le matrici triangolari inferiori unipotenti hanno particolare interesse le matrici triangolari inferiori unipotenti *elementari* che hanno tutti gli elementi nulli al di sotto della diagonale principale, escluso al più uno. Se indichiamo con λ tale elemento e con r ed s , $r > s$, rispettivamente la riga e colonna su cui si trova, avremo la matrice:

$$E_{rs}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Se $\lambda = 0$ si ottiene ovviamente la matrice identica.

7.1 PROPRIETÀ. Sia A una matrice quadrata di ordine n ed $E_{rs}(\lambda)$ dello stesso ordine. Allora:

$$E_{rs}(\lambda) A = E_{rs}(\lambda) \begin{vmatrix} \text{---} & \mathbf{a}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_s & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_r & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_m & \text{---} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{---} & \mathbf{a}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_s & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_r + \lambda \mathbf{a}_s & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_m & \text{---} \end{vmatrix}.$$

Il risultato è la matrice che ha le stesse righe di A tranne la r^{ma} che è la combinazione lineare della riga r^{ma} e della s^{ma} di A con pesi 1 e λ .

Come applicazione consideriamo il seguente:

7.2 ESEMPIO Per la matrice triangolare inferiore unipotente a primo membro vale la fattorizzazione:

$$\begin{vmatrix} 1 & & \\ a & 1 & \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ a & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

La verifica dell'uguaglianza è immediata, basta a secondo membro usare la proprietà associativa e moltiplicare inizialmente le due ultime matrici facendo uso di 7.1; si ottiene la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ b & c & 1 \end{vmatrix}, \text{ effettuando quindi il prodotto } \begin{vmatrix} 1 & & \\ a & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$$

sempre per 7.1 si ottiene la matrice a primo membro.

La formula scritta permette di fattorizzare una matrice triangolare inferiore unipotente tramite matrici triangolari inferiori unipotenti *elementari* prese in un "ordine opportuno" e vale in generale per le matrici di ordine n , infatti si ha:

7.3 Proposizione *Se L è una matrice triangolare inferiore unipotente di ordine n , per essa si ha la fattorizzazione:*

$$L = E_{21}E_{31} \dots E_{n1}E_{32}E_{42} \dots E_{n2} \dots E_{n-1, n-2}E_{nn-2}E_{nn-1}$$

dove la matrice elementare E_{ij} (con $i > j$) ha nel posto i, j l'elemento λ_{ij} della matrice L .

Dim. La dimostrazione è la stessa che abbiamo esplicitamente fatto nel caso $n = 3$ ed è lasciata per esercizio. ♣

Notare che è importante l'ordine con cui abbiamo scritto i fattori di 7.3; infatti in generale due matrici elementari unipotenti *non* commutano (cfr. 7. di 5.E).

Sempre come applicazione di 7.1 abbiamo che:

7.4 Proposizione Ogni matrice triangolare inferiore unipotente elementare $E_{rs}(\lambda)$ è invertibile e l'inversa è la matrice triangolare inferiore unipotente elementare $E_{rs}(-\lambda)$.

Dim. Basta effettuare il prodotto $E_{rs}(\lambda)E_{rs}(-\lambda)$ facendo uso di 7.1 per riconoscere che si ottiene la matrice identica. ♣

Osserviamo che, come conseguenza della fattorizzazione 7.3 e della proposizione 6.5, ogni matrice triangolare inferiore unipotente è invertibile.

Nel procedimento di eliminazione di Gauss sono previsti scambi di righe. Anche questi si possono effettuare tramite prodotti.

7.5 Definizione. i) Una matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ si dice di permutazione se è ottenuta dalla matrice identità I permutandone i vettori riga, cioè scambiandoli fra loro (cfr. capitolo 3, sezione 1.).

ii) Una matrice di permutazione si dice elementare, e si indica con P_{ij} , se è ottenuta da I scambiando il vettore e_i con e_j . ♣

7.6 Proposizione Il prodotto $P_{ij}A$ è la matrice A' ottenuta da A scambiando la riga i con la riga j .

Dim. Basta ricordare che $e_i A = a_i$. ♣

Osserviamo infine che una matrice di permutazione P si può scrivere come prodotto di matrici di permutazione elementari in quanto

membro, relativamente ai moltiplicatori con gli stessi indici e nell'ordine previsto dalla proposizione 7.3. La proposizione è così provata. ♣

Supponiamo ora che la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ sia non singolare. La fattorizzazione (7.9) avviene con una matrice triangolare superiore T i cui elementi sulla diagonale principale sono i pivots. Facendo uso dell'esercizio 11 della sezione 5. E possiamo scrivere $T = DU$, dove D è la matrice diagonale che contiene ordinatamente i pivots ed U è la matrice unipotente ottenuta da T dividendo ciascuna riga per il corrispondente pivot. In definitiva si ottiene:

7.10 Proposizione. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è non singolare per essa vale la fattorizzazione di Gauss:*

$$PA = LDU$$

dove:

P è una matrice di permutazione,

L è una matrice triangolare inferiore unipotente,

D è una matrice diagonale con elementi sulla diagonale tutti non nulli,

U è una matrice triangolare superiore unipotente.

7.11 ESEMPIO. Consideriamo le matrici A e B di 3.15 per le quali abbiamo già effettuato una eliminazione di Gauss; la fattorizzazione per la matrice A è del tipo $A = LS$ in quanto l'eliminazione è stata effettuata senza scambi di righe:

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & -2 \\ 6 & -9 & -1 & -1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|.$$

La matrice B è non singolare e per essa vale la fattorizzazione $PA = LDU$ dove P corrisponde agli scambi effettuati: al primo passo la prima e la terza riga, al secondo passo la seconda e la terza. Va osservato che se effettuiamo questi due scambi su B l'eliminazione può avvenire senza scambi di righe e se così procediamo troviamo gli stessi moltiplicatori fra loro scambiati, cioè $\lambda_{21} = 0$, $\lambda_{31} = 2$. La fattorizzazione è quindi:

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|.$$

7.E Esercizi

1. Determinare una fattorizzazione $PA = LS$ per la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

È possibile una fattorizzazione $PA = LDU$?

2. Calcolare una fattorizzazione di Gauss per le matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Determinare una fattorizzazione $PA = LS$ per la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

8. ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

ESERCIZIO I

1. Determinare il prodotto delle due matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Scrivere, se possibile, il vettore w come combinazione lineare delle colonne della matrice A :

$$w = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Trovare due matrici E ed F , appartenenti ad $M_2(\mathbb{R})$ ed entrambe non nulle, tali che $EF = 0$. (Si consiglia di scegliere per F una matrice

numerica opportuna e di imporre la condizione richiesta per una matrice E arbitraria).

ESERCIZIO II

1. Risolvere i sistemi $Ax = b_1$, $Ax = b_2$, $Ax = b_3$, dove:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

2. Calcolare il rango di A e determinare il sottospazio delle soluzioni del corrispondente sistema omogeneo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

3. Sia A una matrice di ordine 2 che commuti con tutte le matrici dello stesso tipo (ossia $AB = BA$ per ogni matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$). Dimostrare che A è una matrice scalare.

ESERCIZIO III

1. Eseguire i seguenti prodotti AB , A^2 , CB , CAB , dove:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Invertire la matrice $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Si determini il rango della matrice $A(s)$ dei coefficienti del seguente sistema:

$$\begin{aligned} y + (s + 5)z &= 1 \\ sx + 2sy + 2z &= s^2 \\ x + 2y - z &= s \end{aligned}$$

al variare del parametro s . Per quali valori del parametro s il sistema è compatibile?

L'E.G. e' utilissima!
Vorrei provare a
eliminare il Prof.!!!

Non ti illudere!
quello e'
coriaceo...

Capitolo 2

SPAZI VETTORIALI

INTRODUZIONE. In questo capitolo introduciamo altri esempi di spazi vettoriali, di cui uno di natura geometrica. Diamo quindi la nozione di "base" per un sottospazio e quella di "dimensione", illustrandole esplicitamente su esempi.

Introduciamo in fine la nozione astratta di spazio vettoriale di "dimensione finita" e, tramite la scelta di una "base", ci riconduciamo agli spazi vettoriali numerici.

La teoria svolta nel capitolo 1 per i sistemi di equazioni lineari ci permette di determinare "basi" per i sottospazi e di studiare le loro intersezioni. In particolare viene introdotta la nozione di decomposizione in "somma diretta."

1. ALTRI ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

1.1 Spazio vettoriale dei segmenti orientati centrati in O . Consideriamo lo spazio $\mathcal{E}^3$ della geometria euclidea (cfr. sezione 6 del capitolo 4), noto allo studente (si spera!) dalla scuola secondaria. Esso è stato storicamente la "modellizzazione matematica" dello spazio fisico anche se, dal punto di vista della relatività, si ha un modello geometrico diverso da quello euclideo. Per questo motivo $\mathcal{V}_O$ verrà anche chiamato lo "spazio ordinario".

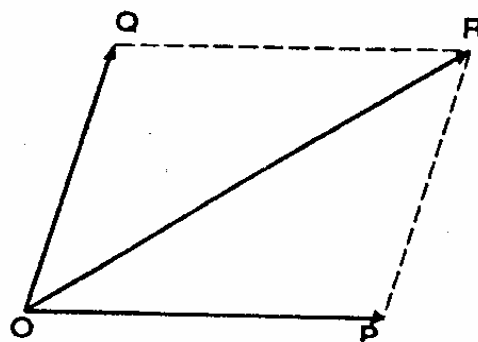
Fissiamo un punto O arbitrariamente in $\mathcal{E}^3$ ed indichiamo con $\mathcal{V}_O$ l'insieme dei *segmenti orientati* OP di primo estremo O e secondo estremo un punto qualunque P di $\mathcal{E}^3$. Un segmento orientato OP lo chiameremo anche *vettore geometrico*; $\mathcal{V}_O$ è pertanto l'insieme dei vettori geometrici dello spazio ordinario, ovvero l'insieme dei *segmenti orientati centrati nel punto O* .

Nell'insieme $\mathcal{V}_O$ possiamo introdurre *due operazioni*, la "somma" ed il "prodotto per uno scalare", che formalmente godono delle stesse proprietà I, ..., VII date in 4.2 del capitolo 1.

OPERAZIONE DI SOMMA. Dati comunque due vettori geometrici OP ed OQ di $\mathcal{V}_O$, a partire dal punto P tracciamo il segmento PR parallelo ad

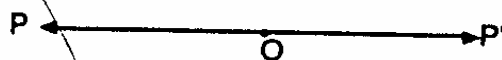
OQ e con la stessa orientazione di OQ . Poniamo quindi, per definizione:

$$OP + OQ \stackrel{\text{def}}{=} OR.$$



In particolare se O, P, Q non sono allineati il punto R è il quarto vertice del parallelogramma costruito sui vettori OP ed OQ .

Osserviamo che in questo caso il vettore geometrico *nullo*, cioè l'elemento neutro per la somma, è dato dal segmento orientato di primo estremo O e di secondo estremo $P \equiv O$; esso verrà anche indicato con o . Il vettore geometrico *opposto* di OP è il vettore OP' , ove P' è il simmetrico di P rispetto ad O , cioè $-OP = OP'$.

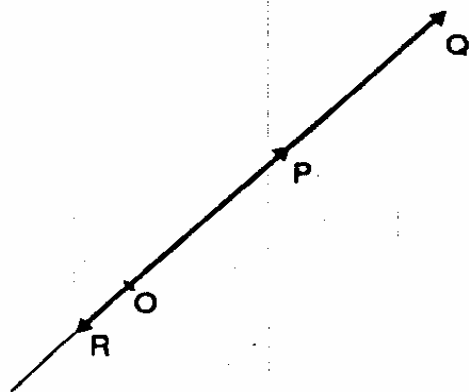


OPERAZIONE DI PRODOTTO PER UNO SCALARE. Sia OP un qualunque vettore di $\mathcal{V}_O$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Sulla semiretta di origine O e contenente P costruiamo il punto Q (unico) tale che il rapporto fra i segmenti OQ ed OP sia il valore assoluto $|\alpha|$ (stiamo usando qui la teoria dei rapporti fra segmenti!). Definiamo quindi, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha OP = \begin{cases} OQ & \text{se } \alpha > 0 \\ OO = o & \text{se } \alpha = 0 \\ OQ' & \text{se } \alpha < 0, \text{ ove } Q' \text{ è il simmetrico di } Q \text{ rispetto ad } O. \end{cases}$$

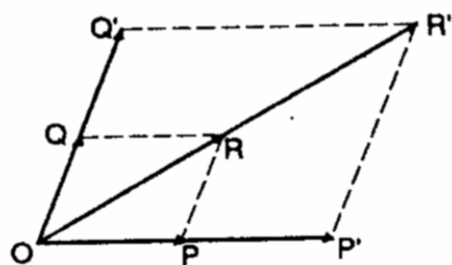
Il risultato è comunque un segmento orientato, cioè un elemento di $\mathcal{V}_O$. Nella figura sono rappresentati i vettori $OQ = 2OP$ ed $OR = (-1/3)OP$.

Abbiamo già annunciato che queste due operazioni godono delle stesse proprietà I, ..., VII date in 4.2 del capitolo 1, sostituendo ovunque $\mathcal{V}_O$ al posto di $\mathbb{R}^n$. La verifica non è più basata sulle proprietà dei numeri reali, bensì sulle proprietà di similitudine fra parallelogrammi e sulla teoria dei rapporti fra segmenti; ciò è ovvio visto che le operazioni



in $\mathcal{V}_O$ sono state definite tramite questi ingredienti. Omettiamo quindi le verifiche esplicite, che ogni studente potrà fare per proprio conto.

A titolo di esempio osserviamo che la VII, che qui si scrive $\alpha(OP + OQ) = \alpha OP + \alpha OQ$, in generale altri non è che la similitudine fra i parallelogrammi $OPRQ$ e $OP'R'Q'$. Avvertiamo infine che le I e II corrispondono a degenerazioni del parallelogramma che determina la somma.



Noi diciamo che $\mathcal{V}_O$ è munito di una *struttura di spazio vettoriale* su $\mathbf{R}$, o anche che è un *esempio di spazio vettoriale* su $\mathbf{R}$, perché in $\mathcal{V}_O$ siamo riusciti a definire due operazioni: la somma ed il prodotto per uno scalare (reale), godenti delle proprietà I, ..., VII (cfr. 4.2 del capitolo 1). Tale esempio è di natura geometrica e sarà importante nello studio della geometria dello spazio ordinario (cfr. anche 6.6 del capitolo 4).

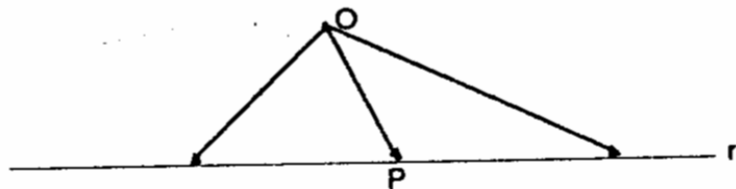
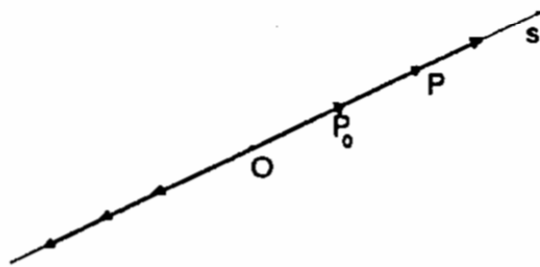
Così come in $\mathbf{R}^n$, anche in $\mathcal{V}_O$ abbiamo la nozione di sottospazio W , di combinazione lineare di vettori, di sottospazio generato da un insieme di vettori, di vettori linearmente indipendenti; basta per ciò ripetere le definizioni date per $\mathbf{R}^n$ (cfr. capitolo 1, sezione 4) e che di fatto prescindono dalla natura degli elementi dello spazio vettoriale in esame.

In questo caso abbiamo però delle interessanti *interpretazioni geometriche*.

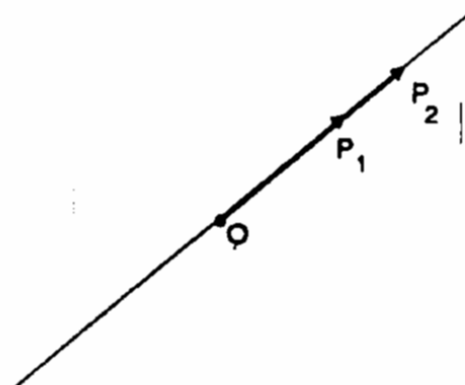
Fissato un vettore $OP_0 \in \mathcal{V}_O$ con $P_0 \neq O$, abbiamo che il sottospazio $\text{Span}(OP_0)$ da esso generato è costituito da tutti e soli i vettori OP , dove P varia sulla retta s passante per O e P_0 .

Viceversa il sottoinsieme W dei vettori OP , dove P varia su una retta s passante per O , è un sottospazio vettoriale. Basta per far ciò scegliere su s un punto $P_0 \neq O$ ed osservare che ogni altro vettore OP è un multiplo di OP_0 per un opportuno scalare reale (positivo, nullo o negativo).

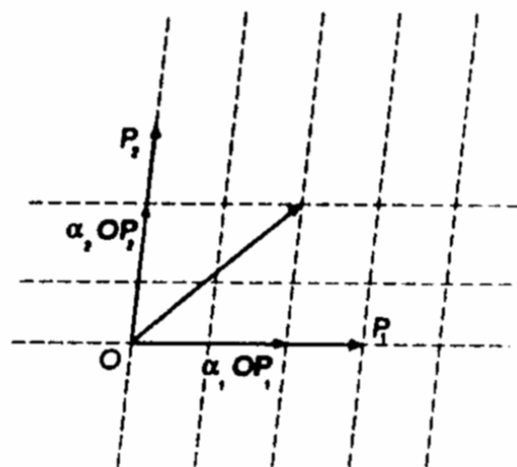
D'altra parte per esempio l'insieme $W \subset \mathcal{V}_O$ dei vettori OP , ove P varia sulla retta r non passante per O , non è un sottospazio vettoriale perché non contiene il vettore nullo.



Consideriamo due vettori OP_1 ed OP_2 entrambi non nulli. Se i punti O, P_1, P_2 sono allineati allora il segmento OP_2 può esprimersi come un multiplo, secondo un numero reale positivo, del segmento OP_1 . Pertanto $OP_2 = kOP_1$ e quindi $kOP_1 - OP_2 = 0$ e l'equazione che definisce la dipendenza o indipendenza lineare dei due vettori dati, $\alpha_1 OP_1 + \alpha_2 OP_2 = 0$, è soddisfatta oltre che dalla soluzione banale $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ anche da $\alpha_1 = k, \alpha_2 = -1$. Pertanto i vettori OP_1 e OP_2 sono dipendenti.



Se i punti O, P_1, P_2 non sono allineati essi determinano un piano su cui giacciono i vettori OP_1 e OP_2 (ed il parallelogramma da essi determinato.) In questo caso essi sono indipendenti, infatti l'equazione $\alpha_1 OP_1 + \alpha_2 OP_2 = 0$ ci dice che la diagonale del parallelogramma di lati $\alpha_1 OP_1$ ed $\alpha_2 OP_2$ deve ridursi al segmento nullo e questo è possibile solo se i lati sono nulli. Segue che deve aversi $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ (come unica soluzione). Osserviamo infine che se i vettori OP_1 ed OP_2 sono indipendenti il sottospazio da essi generato $Span(OP_1, OP_2)$ è costituito dai vettori OP il cui estremo P varia sul piano dei punti O, P_1, P_2 ; se sono dipendenti invece il punto P varia sulla retta passante per i tre punti.



Lasciamo allo studente di discutere il caso in cui siano assegnati tre vettori OP_1, OP_2, OP_3 . Riprenderemo in ogni caso lo studio di V_O nella sezione 5.

Se consideriamo il piano $\mathcal{E}^2$ della geometria euclidea e fissiamo arbitrariamente un punto O possiamo considerare lo spazio vettoriale V'_O dei segmenti orientati OP di primo estremo O e secondo estremo un punto qualunque P di $\mathcal{E}^2$; Le operazioni e quanto abbiamo esposto per V_O continuano a valere per V'_O .

1.2* Lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile. Sia $R[x]$ l'insieme dei polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

al variare dei coefficienti $a_i \in \mathbb{R}$ e al variare di $n \in \mathbb{N}$, (se $a_n \neq 0$ n è il grado di $p(x)$).

In questo insieme si può introdurre un'operazione di somma (binaria e interna) ben nota allo studente: per ogni coppia di polinomi $p(x)$ e $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ abbiamo:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ &\quad + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots + b_mx^m \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots + b_mx^m \in \mathbb{R}[x], \end{aligned}$$

(stiamo supponendo $m \geq n$).

D'altra parte possiamo anche introdurre un'operazione di prodotto per uno scalare reale (anche questa nota allo studente): per ogni numero $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha p(x) &= \alpha (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \dots + (\alpha a_k)x^k \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

È immediato verificare che valgono le proprietà I, ..., VII facendo riferimento, invece che alle n -ple di numeri reali, ai polinomi di $\mathbb{R}[x]$. In particolare il vettore nullo 0 è in questo caso il polinomio i cui coefficienti sono tutti nulli. Anche $\mathbb{R}[x]$ è quindi un esempio di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Tutte le proposizioni e definizioni date nella sezione 4. del capitolo 1 continuano a valere perché conseguenza delle operazioni e delle proprietà citate.

1.3 Lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$. Sia $\mathbb{C}^n$ l'insieme delle n -uple di numeri complessi: un elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ è costituito da n numeri complessi $x_1, x_2, \dots, x_n$ che chiameremo componenti del vettore numerico $\mathbf{x}$; scriveremo usualmente per colonna tali componenti:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima è ovviamente una convenzione; se ci riferiamo ad essa parleremo anche di vettori colonna di $\mathbb{C}^n$. Un'altra convenzione possibile è quella di scrivere $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ come vettore riga: $\mathbf{x} = |x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n|$.

Nell'insieme $\mathbb{C}^n$ possiamo definire due operazioni (di natura diversa) nel modo seguente:

OPERAZIONE DI SOMMA. Ad ogni coppia di vettori $x, y \in \mathbb{C}^n$ essa associa il vettore $x + y \in \mathbb{C}^n$ definito da:

$$x + y = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{vmatrix}.$$

OPERAZIONE DI PRODOTTO PER UNO SCALARE. Ad ogni numero complesso (scalare) $\alpha \in \mathbb{C}$ e ad ogni vettore $x \in \mathbb{C}^n$ essa associa il vettore $\alpha x \in \mathbb{C}^n$ definito da:

$$\alpha x = \alpha \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{vmatrix}.$$

È immediato verificare che anche qui valgono le proprietà 4.2 del capitolo 1: esse altre non sono che le ben note proprietà della somma e del prodotto fra numeri complessi (ripetute per ciascuna componente).

Noi diciamo che $\mathbb{C}^n$ è ora munito di una struttura di *spazio vettoriale* su $\mathbb{C}$, o anche che è un *esempio di spazio vettoriale* su $\mathbb{C}$, proprio perché siamo riusciti ad introdurre nell'insieme $\mathbb{C}^n$ le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare (di $\mathbb{C}$), godenti delle proprietà I, ..., VII.

A questo punto vorremmo che lo studente riflettesse a fondo sugli esempi di spazi vettoriali presentati, al fine di poter trovare, dal punto di vista "astratto", cosa li accomuni!

2. BASI E DIMENSIONE PER UN SOTTOSPAZIO

In questa sezione indichiamo con V uno qualunque degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $M_{mn}(\mathbb{R})$, $\mathcal{V}_O$, $\mathcal{V}'_O$.

2.1 Definizione. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio. Un insieme ordinato di vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ si dice una base per W se:

- i) $W = \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$, cioè i vettori dati sono un sistema di generatori per W ;
- ii) i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.



2.2 ESEMPIO. Sia $e_i \in \mathbb{R}^n$ il vettore che ha tutte le componenti nulle tranne la i^{ma} che vale 1. I vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$ sono una base per $\mathbb{R}^n$, che prende il nome di *base canonica*. Infatti ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere nella forma:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le componenti di x . Quindi i vettori dati sono un sistema di generatori. Inoltre sono linearmente indipendenti in quanto l'equazione $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ è verificata solo per $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, (cfr. definizione 4.6 ed esempio 4.7 del capitolo 1). Notiamo che gli stessi vettori sono una base di $\mathbb{C}^n$, basta ripetere quanto detto facendo uso del campo $\mathbb{C}$ invece che di $\mathbb{R}$. ♡

2.3 Proposizione. L'insieme dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ è una base per il sottospazio $W \subseteq V$, se e solo ogni $w \in W$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della base ed i coefficienti sono unici.

Dim. Supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ sia una base e che per un vettore $w \in W$ si abbia :

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k, \quad w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k.$$

Sottraendo membro a membro si ha:

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k.$$

Essendo i vettori $v_1, \dots, v_k$ indipendenti deve necessariamente essere $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_k - \beta_k = 0$, da cui l'unicità dei coefficienti.

Viceversa supponiamo che per ogni vettore $w \in W$ si abbia $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, e che tali coefficienti siano unici. Ne segue che i vettori $v_1, \dots, v_k$ generano W ; inoltre per il vettore nullo la rappresentazione $0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, deve essere unica e quindi i vettori in esame sono indipendenti. ♣

In virtù della proposizione appena dimostrata possiamo dare la seguente:

2.4 Definizione. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio e sia $v_1, v_2, \dots, v_k$ una sua base. Si chiamano coordinate di un vettore $w \in W$, rispetto alla base data, i coefficienti che lo esprimono come combinazione lineare della base medesima. ♣

Le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica $e_1, \dots, e_n$ coincidono con le componenti del vettore stesso.

2.5 Teorema. *Se il sottospazio $W \subseteq V$ ammette due basi $v_1, v_2, \dots, v_k$ e $w_1, w_2, \dots, w_h$ allora $k = h$.*

Dim. Supponiamo, per assurdo, che sia $k > h$. I vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono in W ed essendo $w_1, w_2, \dots, w_h$ una base per il sottospazio possiamo scrivere ciascuno dei vettori del primo gruppo mediante quelli del secondo, cioè:

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 + \dots + c_{1h}w_h \\ v_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 + \dots + c_{2h}w_h \\ &\vdots \\ v_k &= c_{k1}w_1 + c_{k2}w_2 + \dots + c_{kh}w_h. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Noi sappiamo che l'equazione $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ ammette la sola soluzione $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, per l'indipendenza dei vettori in questione. Sostituendo in questa equazione le relazioni (2.6) ed associando opportunamente i termini, otteniamo:

$$(c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots + c_{k1}\alpha_k)w_1 + (c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{k2}\alpha_k)w_2 + \dots + (c_{1h}\alpha_1 + c_{2h}\alpha_2 + \dots + c_{kh}\alpha_k)w_h = 0.$$

L'indipendenza dei vettori $w_1, \dots, w_h$ implica che anche i coefficienti di questa combinazione lineare devono essere tutti nulli, cioè:

$$\begin{aligned} c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots + c_{k1}\alpha_k &= 0, \\ c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{k2}\alpha_k &= 0, \\ &\vdots \\ c_{1h}\alpha_1 + c_{2h}\alpha_2 + \dots + c_{kh}\alpha_k &= 0. \end{aligned}$$

Ma il sistema che abbiamo scritto, per il quale le incognite sono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, ammette infinite soluzioni perché la matrice C dei coefficienti è di tipo $h \times k$ e $\text{rg}(C) \leq \min(h, k) < k$. Abbiamo ottenuto un assurdo in quanto ciò implicherebbe la dipendenza dei vettori $v_1, \dots, v_k$. Quindi è assurda l'ipotesi $k > h$.

Scambiando le veci delle due basi in modo del tutto analogo proviamo che non può essere $k < h$ e quindi otteniamo che $k = h$. ♣

Questa proposizione ci permette di porre la seguente:

2.7 Definizione. *Sia $\{0\} \neq W \subseteq V$ un sottospazio; si chiama dimensione di W , e si indica con $\dim(W)$, il numero degli elementi di una sua qualunque base. Se $W = \{0\}$ si pone $\dim(W) = 0$.* ♣

Osserviamo che per un sottospazio proprio $W \subset V$ risulta:

$$(2.8) \quad 0 \leq \dim(W) < \dim(V)$$

Lo studente avrà notato che tutte le definizioni e proposizioni che abbiamo illustrato prescindono dalla natura degli elementi dello spazio vettoriale in esame; in altri termini sono del tutto generali.

Possiamo ora calcolare la dimensione degli spazi $V = \mathbb{R}^n$, $M_{mn}(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{V}_O$. In virtù dell'esempio 2.2 abbiamo che:

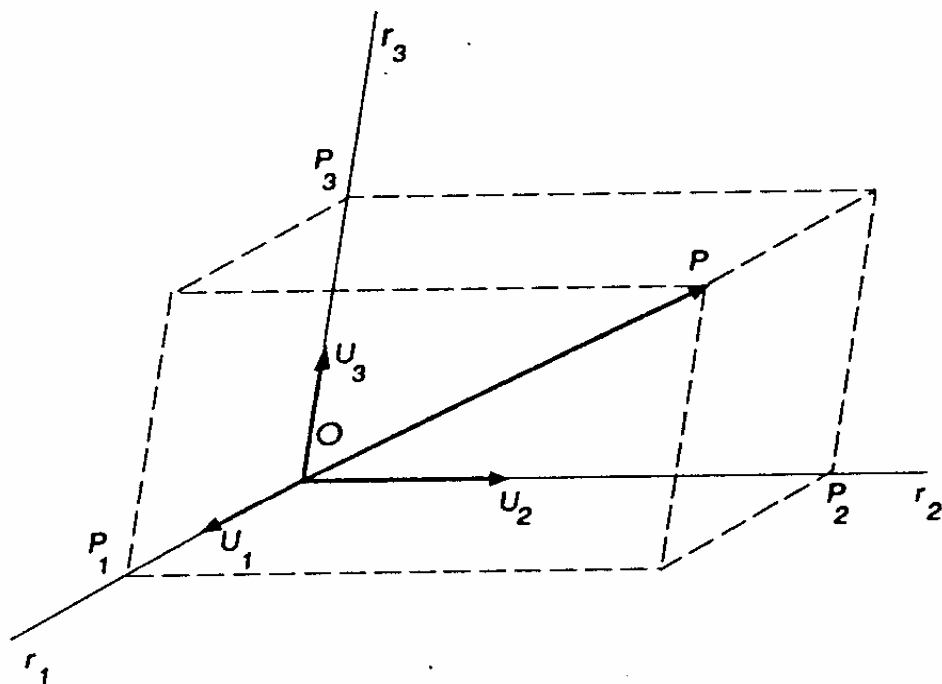
$$(2.9) \quad \dim(\mathbb{R}^n) = n \quad \dim(\mathbb{C}^n) = n \quad \dim(M_{mn}(\mathbb{R})) = mn,$$

(per $M_{mn}(\mathbb{R})$ abbiamo tenuto conto dell'osservazione 4.15 del Capitolo 1).

Vogliamo provare infine che:

$$(2.10) \quad \dim(\mathcal{V}_O) = 3.$$

Consideriamo tre vettori $i = OU_1$, $j = OU_2$, $k = OU_3$ tali che i punti U_1, U_2, U_3 individuino un triangolo su un piano non passante per O . Vogliamo provare che questi tre vettori sono una base per $\mathcal{V}_O$. Infatti sia



$OP \in \mathcal{V}_O$ un qualunque vettore e siano r_1, r_2, r_3 le rette che congiungono O rispettivamente con U_1, U_2, U_3 ; esiste un'unico parallelepipedo che ha come diagonale OP e con i lati sulle rette r_1, r_2, r_3 . Corrispondentemente abbiamo la decomposizione *unica*:

$$(2.11) \quad OP = OP_1 + OP_2 + OP_3 = xi + yj + zk,$$

dove $OP_1 = xi$, $OP_2 = yj$, ed $OP_3 = zk$. La tesi è quindi provata; in particolare da (2.8) segue che in $\mathcal{V}_O$ i sottospazi propri hanno dimensione 0, 1 e 2.

In modo analogo si vede che $\dim(\mathcal{V}'_O)=2$; basta infatti verificare che una base è costituita da due vettori $i=OU_1$, $j=OU_2$ tali che i punti O, U_1, U_2 non siano allineati.

2.E Esercizi

1. Provare che l'insieme $\mathcal{S} = \{A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.
2. Provare che il sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici triangolari superiori è un sottospazio e determinarne la dimensione.
3. Provare che l'insieme $\mathbb{R}_4[x]$ dei polinomi di grado ≤ 4 è uno spazio vettoriale e calcolarne la dimensione.
4. Provare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}_4[x]$ costituito dai polinomi di grado esattamente 4 non è un sottospazio vettoriale.
5. Determinare una base per il sottospazio di $M_3(\mathbb{R})$ delle matrici per cui $a_{ij} = a_{ji}$ per $i \neq j$.
6. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori linearmente dipendenti; provare che almeno uno di essi si scrive come combinazione lineare dei rimanenti.

3. SPAZI VETTORIALI SU UN CAMPO K : IL CASO DI DIMENSIONE FINITA

In questa sezione e nelle seguenti faremo uso di un campo K che sia il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ oppure il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, ma tutto quello che diremo vale per un campo qualunque; per esempio lo studente può far riferimento al campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ o agli esempi di campi numerici di cui abbiamo parlato nella sezione 1 del capitolo 1.

3.1 Definizione. Sia V un insieme, si dice che in esso si è introdotta una struttura di spazio vettoriale sul campo K , se in esso sono state definite due operazioni: la somma che associa ad ogni coppia di elementi $v_1, v_2 \in V$ un elemento $v_1 + v_2 \in V$, il prodotto per uno scalare che associa ad ogni $\alpha \in K$ e ad ogni $v \in V$ l'elemento $\alpha v \in V$, in modo tale che siano verificate le seguenti proprietà:

- I $\exists$ un vettore $o \in V$ tale che $o + x = x + o = x, \forall x \in V$. Esso si chiama vettore nullo.

- II $\forall x \in V, \exists$ un vettore $-x \in V$ tale che $x + (-x) = 0$. Esso si chiama vettore opposto di x .
- III $\forall x, y \in V$ si ha $x + y = y + x$
proprietà commutativa della somma;
- IV $\forall x, y, z \in V$ si ha $(x + y) + z = x + (y + z)$
proprietà associativa della somma;
- V $\forall x \in V$ si ha: $1x = x$.
- VI $\forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall x \in V$ si ha $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
- VII $\forall \alpha \in K$ e $\forall x, y \in V$ si ha $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
proprietà distributiva della somma
rispetto al prodotto per uno scalare. ♣

Questa definizione è il risultato dell'operazione di "astrattizzazione" che abbiamo richiesto allo studente alla fine della sezione 1! Gli esempi che abbiamo più volte citato, a prescindere dalla natura degli elementi degli insiemi che sono chiaramente diversi, hanno in comune il tipo di operazioni (anche se il campo da cui si prendono gli scalari può essere diverso) e le proprietà di cui le operazioni stesse godono!

Tutte le conseguenze delle operazioni e delle proprietà possono quindi essere ripetute. Lo facciamo rapidamente per le principali:

- Un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice un *sottospazio vettoriale* di V se esso è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite in V .
- Un insieme finito di vettori $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ si dice *linearmente indipendente* se l'equazione:

$$(3.2) \quad c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0,$$

nelle incognite $c_1, c_2, \dots, c_k$, ammette la sola soluzione in K :

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

- Un insieme di vettori $v_1, v_2, \dots, v_h, \dots$ (finito o infinito) si dice un *sistema di generatori* per V (o per un suo sottospazio W) se ogni vettore $v \in V$ (ovvero $v \in W$) si scrive come *combinazione lineare di un numero finito di essi*.
- Un insieme ordinato di vettori $v_1, v_2, \dots, v_h, \dots$ (finito o infinito) si dice una *base* per V (o per un suo sottospazio W) se esso è un *sistema di generatori* per V (o per W) ed ogni suo sottoinsieme finito è costituito da vettori linearmente indipendenti.

Le ultime due definizioni sono più generali di quelle fornite negli esempi di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}_0$, etc., proprio per poter contemplare anche il caso di $\mathbb{R}[x]$ (cfr. esempio 1.2). Osserviamo infatti che i polinomi $1, x, x^2, \dots, x^h, \dots$ non solo sono un sistema infinito di generatori (ogni polinomio si scrive come combinazione lineare di potenze di x), ma sono anche una *base*: fissato infatti un qualunque numero di essi: $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$, si ha $c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + \dots + c_r x^{k_r} = 0$ se e solo se il polinomio a primo membro è il polinomio nullo e quindi se e solo se i suoi coefficienti sono tutti nulli.

A questo punto per uno spazio vettoriale $V \neq \{0\}$, dobbiamo distinguere *due casi*:

- i) V ammette una *base finita*, nel qual caso possiamo provare, senza alcuna variazione, il teorema che afferma che ogni altra sua base ammette lo stesso numero di elementi (cfr. 2.5) e questo numero prende il nome di *dimensione finita* di V .
- ii) V non ammette *base finita* ed in questo caso si dice che V ha *dimensione infinita*.

In questo corso di algebra lineare tratteremo solo il caso di *spazi vettoriali di dimensione finita*.

$\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{C}[x]$ sono esempi di spazi vettoriali di dimensione infinita; lo studente incontrerà altri esempi nei corsi successivi. Essi generalmente nascono da spazi di funzioni. Notare, per esempio, che un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ può essere interpretato come una funzione polinomiale $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e come tale è una funzione continua. L'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ha anch'esso una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}[x]$ è di fatto un suo sottospazio proprio; da ciò segue che $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita (perché?).

3.3 OSSERVAZIONE (FONDAMENTALE). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo K . Fissata una base $v_1, \dots, v_n$ ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico:

$$(3.4) \quad v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n;$$

quindi al vettore $v \in V$ possiamo associare il vettore numerico $x \in K^n$ che ha come componenti le coordinate di v nella base fissata e viceversa. Inoltre se $v, v' \in V$ ed x, x' sono i vettori numerici corrispondenti, alla somma $v+v'$ in V corrisponde la somma $x+x'$ in K^n ed analogamente ad αv corrisponde αx . Quindi possiamo sostituire allo spazio vettoriale V lo spazio vettoriale numerico K^n ($\mathbb{R}^n$ oppure $\mathbb{C}^n$ se $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) dove sappiamo effettuare calcoli.

4. L'ALGORITMO DI GAUSS PER SELEZIONARE UNA BASE DA UN SISTEMA DI GENERATORI

Quanto segue sarà specifico degli spazi di vettori numerici $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$. Ciò non è restrittivo se si tien conto dell'osservazione 3.3.

4.1 ESEMPIO. Consideriamo la matrice a scala $S \in M_{34}(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

dove $rg(S)=2$ e le colonne contenenti i pivots sono rispettivamente $j_1=1$, $j_2=3$. I primi due vettori riga s_1 e s_2 sono linearmente indipendenti:

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 = |2\alpha_1 \quad -3\alpha_1 \quad -2\alpha_1 + 5\alpha_2 \quad \alpha_1 - 4\alpha_2| = |0 \quad 0 \quad 0 \quad 0|$$

implica infatti $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e per ottenere ciò basta considerare solo le componenti j_1 -ma e j_2 -ma del vettore $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2$.

Consideriamo i vettori colonna $s^{j_1} = s^1$ ed $s^{j_2} = s^3$ corrispondenti ai pivots. Essi sono linearmente indipendenti perchè l'equazione $\alpha_1 s^{j_1} + \alpha_2 s^{j_2} = 0$ può essere scritta come il sistema $S_0 \alpha = 0$ dove α è il vettore colonna di componenti α_1, α_2 ed S_0 è la matrice a scala che contiene per colonne ordinatamente i vettori in esame (cfr. 5.5, capitolo 1). Poichè non vi sono parametri liberi la soluzione $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ è unica. I due vettori selezionati sono anche il numero massimo di vettori indipendenti fra i vettori colonna di S in quanto se aggiungiamo ad essi altri vettori (uno o due in questo caso) e scriviamo l'equazione di dipendenza e indipendenza lineare sotto forma di sistema otteniamo una matrice a scala (estratta da S) che ha parametri liberi. ♥

Quanto abbiamo ora visto su un esempio è un fatto che vale in generale, infatti si ha:

4.2 Proposizione. Sia S una matrice a scala di tipo $m \times n$ e di rango r (cfr. (3.14) del capitolo 1). Indicati con $s_1, \dots, s_r$ i suoi vettori riga non nulli e con $s^{j_1}, \dots, s^{j_r}$ i vettori colonna corrispondenti ai pivots, si ha che:

- i vettori $s_1, s_2, \dots, s_r$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per il sottospazio generato dai vettori riga di S .
- i vettori $s^{j_1}, s^{j_2}, \dots, s^{j_r}$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per lo spazio generato dai vettori colonna di S .

Dim. La dimostrazione è del tutto simile a quella dell'esempio 4.1. Per a) si consideri l'equazione $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_r s_r = 0$; la componente j_1 -ma del vettore a primo membro è $\alpha_1 p_1 = 0$ e poichè $p_1 \neq 0$ si ha $\alpha_1 = 0$, ne segue che la componente j_2 -ma è $\alpha_2 p_2 = 0$ da cui $\alpha_2 = 0, \dots$, la componente j_r -ma è $\alpha_r p_r = 0$ da cui $\alpha_r = 0$.

Per b) si ricordi che l'equazione $\alpha_1 s^{j_1} + \dots + \alpha_r s^{j_r} = 0$ è la stessa cosa del sistema $S_0 \alpha = 0$, dove S_0 è la sottomatrice di S corrispondente alle colonne $j_1, \dots, j_r$; poichè non vi sono parametri liberi la soluzione è unica. Se poi aggiungiamo uno o più vettori s^h ed indichiamo con S_* la corrispondente sottomatrice di S essa è a scala e vi è almeno un parametro libero e quindi i vettori sono dipendenti. ♣

4.3 Proposizione. Sia A una matrice di tipo $m \times n$ e rango r ed S una sua riduzione a scala. Allora:

$\alpha)$ I vettori riga $s_1, s_2, \dots, s_r$ di S sono una base per il sottospazio $\text{Span}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ generato dai vettori riga di A , e quindi si ha:

$$\text{Span}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \text{Span}(s_1, s_2, \dots, s_r)$$

$\beta)$ Il rango di A è il numero massimo di vettori riga di A che sono linearmente indipendenti.

Dim. Proviamo innanzitutto che:

$$\text{Span}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \text{Span}(s_1, s_2, \dots, s_r).$$

Questa è diretta conseguenza del modo in cui opera l'algoritmo di eliminazione di Gauss. Infatti nel primo passo che effettuiamo sulla matrice A , dopo aver eventualmente permutato alcuni vettori riga (operazione che certamente non altera il sottospazio $\text{Span}(a_1, a_2, \dots, a_m)$), otteniamo la matrice A_1 i cui vettori riga indicheremo con $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$; essi sono legati ai vettori riga della matrice A dalle relazioni (cfr. 3.9, capitolo 1):

$$a'_1 = a_1, \quad a'_2 = a_2 - \lambda_{21}a_1, \quad a'_3 = a_3 - \lambda_{31}a_1, \quad \dots, \quad a'_m = a_m - \lambda_{m1}a_1,$$

che si invertono in:

$$a_1 = a'_1, \quad a_2 = a'_2 + \lambda_{21}a'_1, \quad a_3 = a'_3 + \lambda_{31}a'_1, \quad \dots, \quad a_m = a'_m + \lambda_{m1}a'_1.$$

Quindi ogni vettore che si esprima come combinazione lineare dei vettori riga di A si esprime anche come combinazione lineare dei vettori riga della matrice A'_1 e viceversa. Abbiamo pertanto provato che $\text{Span}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \text{Span}(a'_1, a'_2, \dots, a'_m)$. Poiché i successivi passi dell'eliminazione sono tutti dello stesso tipo con la stessa tecnica proviamo che lo spazio generato dai vettori riga di A è lo stesso dello spazio generato dai vettori riga di S . Per ipotesi A ha rango r e quindi i primi r vettori riga di S sono indipendenti e costituiscono una base per lo spazio generato dalle sue righe, così come è stato visto in 4.2 a). Abbiamo così provato $\alpha)$.

Per provare $\beta)$ basta osservare che se estraiamo fra i vettori $a_1, \dots, a_m$ un numero massimo di vettori indipendenti otteniamo una base di

$\text{Span}(a_1, \dots, a_m)$; infatti, per la massimalità della scelta, ogni altro vettore a_i è dipendente da quelli estratti. La tesi segue ora dal fatto che, per α), la dimensione dello spazio generato dalle righe di A è r . ♣

4.4 Proposizione. *Sia A una matrice di tipo $m \times n$ e rango r e sia S una sua riduzione a scala in cui i pivots si trovino sulle colonne $j_1, j_2, \dots, j_r$. Allora:*

- $\alpha)$ *I vettori colonna $a^{j_1}, a^{j_2}, \dots, a^{j_r}$ di A sono linearmente indipendenti e sono una base per il sottospazio generato dai vettori colonna di A .*
- $\beta)$ *Il rango di A è il numero massimo di vettori colonna che sono linearmente indipendenti.*

Dim. Sia A_0 la sottomatrice di A ottenuta prendendo nell'ordine solo le colonne $j_1, j_2, \dots, j_r$ ed S_0 l'analoga matrice estratta da S ; il procedimento di eliminazione di Gauss effettuato su A è tale che S_0 è la riduzione a scala di A_0 (perché?). Pertanto le soluzioni di $A_0 \alpha = 0$ sono le soluzioni di $S_0 \alpha = 0$; ma quest'ultimo sistema ammette solo la soluzione banale (come abbiamo visto in $b)$ di 4.2); ne segue che i vettori colonna $a^{j_1}, a^{j_2}, \dots, a^{j_r}$ di A_0 sono *indipendenti*.

Se indichiamo con A_* la sottomatrice di A ottenuta prendendo ordinatamente i vettori colonna relativi alle colonne $j_1, j_2, \dots, j_r$, ed inserendo un ulteriore vettore a^h , una sua riduzione a scala è la sottomatrice S_* estratta da S prendendo le medesime colonne. Il sistema $A_* \alpha = 0$ è quindi equivalente al sistema $S_* \alpha = 0$ il quale ammette ora infinite soluzioni (cfr. dim. $b)$ di 4.2), da cui la dipendenza dei vettori colonna di A_* . I vettori colonna di A_0 sono una scelta, fra i vettori colonna di A , di vettori indipendenti ed in numero massimo.

In particolare, se prendiamo una soluzione non banale α' di $A_* \alpha = 0$ abbiamo la relazione di dipendenza: $\alpha'_1 a^{j_1} + \alpha'_2 a^{j_2} + \dots + \alpha'_h a^h + \dots + \alpha'_r a^{j_r} = 0$, dove il coefficiente α'_h deve essere necessariamente non nullo, altrimenti i rimanenti vettori sarebbero dipendenti. Possiamo quindi ricavare il vettore a^h (cioè uno qualunque dei vettori rimanenti che generano $W = \text{Span}(a^1, a^2, \dots, a^n)$) in funzione di $a^{j_1}, a^{j_2}, \dots, a^{j_r}$. In definitiva ogni vettore di W , che si esprime quindi come combinazione lineare dei vettori $a^1, a^2, \dots, a^n$, può esprimersi anche come combinazione lineare dei vettori $a^{j_1}, a^{j_2}, \dots, a^{j_r}$ e questo prova che i vettori indicati generano W , pertanto sono una base. Abbiamo così provato $\alpha)$. Da ciò segue che lo spazio generato dai vettori colonna di A ha dimensione r e quindi ogni altra base estratta dal sistema di generatori dato è costituita da r elementi, cioè $\beta)$. ♣

4.5 PROBLEMA. *Dati k vettori appartenenti ad $\mathbb{R}^n$ come si fa a verificare che essi sono linearmente indipendenti ed in caso contrario come si fa a determinare una base per il sottospazio da essi generato?*

La risposta si può ottenere in *due modi diversi*.

I) Scriviamo i k vettori dati come vettori riga di una matrice A ed indichiamoli quindi con $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$; la matrice A è di tipo $k \times n$. Basta ora calcolare il rango r di A tramite una sua riduzione a scala S . Se $r = k$ i vettori sono indipendenti; se $r < k$ i vettori sono dipendenti e una base per lo spazio da essi generato è dato dai vettori riga non nulli della matrice S (cfr. proposizione 4.3). ♥

II) Scriviamo i k vettori dati come vettori colonna di una matrice A e pertanto indichiamoli con $a^1, a^2, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$; la matrice A è di tipo $n \times k$. Calcoliamo il rango r di A tramite una sua riduzione a scala S . Se $r = k$ i vettori dati sono indipendenti; se $r < k$ i vettori dati sono dipendenti ed i vettori $a^{j_1}, a^{j_2}, \dots, a^{j_r}$ che si trovano sulle colonne relative ai pivots sono una base per lo spazio da essi generato (cfr. proposizione 4.4). ♥

Questo secondo metodo permette di estrarre una base da un sistema di generatori dato.

4.6 OSSERVAZIONE. Il metodo di E.G.↓ (che opera sui vettori riga) seleziona vettori colonna linearmente indipendenti ed in numero massimo, secondo il seguente criterio: a partire dai vettori ordinati $a^1, \dots, a^k$, il vettore a^{j_1} è il primo non nullo; a^{j_2} è il primo vettore tale che a^{j_1}, a^{j_2} sono linearmente indipendenti; a^{j_3} è il primo vettore tale che $a^{j_1}, a^{j_2}, a^{j_3}$ sono linearmente indipendenti; ... ; e così via.. Naturalmente se si cambia l'ordine dei vettori si perviene in generale ad una base diversa. ♥

4.7 ESERCIZIO. *Dati i vettori*

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

determinare una base e la dimensione del sottospazio da essi generato.

Identifichiamo $M_2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$ scrivendo i vettori dati come vettori riga (usiamo quindi il procedimento I):

$$|-1 \ 1 \ 1 \ 2|, |1 \ -3 \ 0 \ -2|, |0 \ -1 \ 1/2 \ 0|.$$

Si tratta ora di determinare una base e la dimensione dello spazio da essi generato. Consideriamo la matrice A (costruita con i vettori riga) ed una sua riduzione a scala S :

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

I vettori sono pertanto dipendenti; una base per lo spazio da essi generato è costituita dai primi due vettori di S , cioè dalle matrici:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Questa base non è estratta dal sistema di generatori dato; in ogni caso la dimensione richiesta è 2.

Possiamo usare anche il procedimento II) descrivendo le matrici date come vettori colonna; si ottiene ora la seguente matrice A ed una sua riduzione a scala S :

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

I primi due vettori colonna di A sono una base; essa, riscritta in termini di matrici, è una base estratta dal sistema di generatori dato. ♥

4.8 OSSERVAZIONE. La β) della proposizione 4.3 (oppure di 4.4) permette di affermare che il numero di pivots di una matrice è indipendente dalla particolare riduzione a scala con cui essi sono determinati. Questo fatto è importante perchè permette di dare la definizione di rango, così come abbiamo fatto in 3.14 del capitolo 1.

4.E Esercizi

1. Decidere se i vettori u_1, u_2, u_3 sono una base per $\mathbb{R}^3$ e dire se ed in quanti modi può esprimersi il vettore w di componenti 1, 9, -2 come loro combinazione lineare:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

2. Dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori u, v, w trovare fra essi il numero massimo di vettori linearmente indipendenti:

$$u = \begin{vmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

3. Determinare la dimensione del sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ generato dai vettori:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

4. Verificare che i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti e completarli ad una base di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

5. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio generato dai vettori:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} k+3 & k-1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} k^2-1 & k-1 & 0 \end{vmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Determinare la dimensione di W al variare di k .

6. Verificare se i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sono una base di $\mathbb{R}^4$ ed in caso affermativo scrivere il vettore $\mathbf{v}$ come loro combinazione lineare:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

7. Si considerino le due matrici A date nello svolgimento dell'esercizio 4.7 e le corrispondenti riduzioni a scala S . Provare che il sottospazio generato dai primi due vettori colonna di A non coincide con il sottospazio generato dai primi due vettori colonna della corrispondente matrice S .

8. Sia A una matrice ed S una sua riduzione a scala. Provare che in generale lo spazio generato dai vettori colonna di A non coincide con lo spazio generato dai vettori colonna di S .

9. Dati i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti, completarli ad una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $n-k$ vettori canonici (quali?).

5. SOTTOSPAZI E SOTTOVARIETÀ AFFINI

Prendiamo in esame ancora una volta il teorema di struttura 5.18 del capitolo 1: l'insieme Δ dei vettori soluzione di un sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è un sottospazio vettoriale; l'insieme $\Delta' \subset \mathbb{R}^n$ dei vettori soluzione di un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), compatibile e con la stessa matrice dei

coefficienti, *non* è un sottospazio vettoriale. Infatti se $A\xi = b$ e $A\xi' = b$, risulta $A(\xi + \xi') = A\xi + A\xi' = 2b = b$ e $A(\alpha\xi) = \alpha(A\xi) = \alpha b = b \quad \forall \alpha$, se e solo se $b = 0$.

Indichiamo con V uno qualunque degli esempi di spazi vettoriali di dimensione finita che abbiamo introdotto. Prendendo spunto dalla relazione $\Delta' = \Delta + \xi_0$ (cfr. (5.18') del capitolo 1) poniamo la seguente:

5.1 Definizione. Sia $W \subset V$ un sottospazio (proprio) e sia $v_0 \in V$ un vettore fissato; si chiama sottovarietà lineare affine parallela a W il sottoinsieme $W' = W + v_0$ ottenuto sommando a v_0 tutti i vettori di W . Si pone inoltre:

$$\dim(W') = \dim(W).$$



Per brevità d'ora in poi ometteremo l'aggettivo *lineare* il quale si riferisce alle equazioni che troveremo fra breve. Nel caso che $v_0 \in W$ si ha $W' = W$, altrimenti W' è ottenuto *traslando* W con il vettore v_0 . L'insieme W' è detto *parallelo* a W in quanto questa è la situazione geometrica che si presenta nello spazio vettoriale V_O .

5.2 SOTTOVARIETÀ AFFINI DI V_O

Sottovarietà affini di dimensione 0. $W = \{O\}$ è l'unico sottospazio di dimensione 0; fissato un vettore $OQ_0 \in V_O$ la sottovarietà corrispondente è $W' = \{OQ_0\}$.

Sottovarietà affini di dimensione 1. Un sottospazio W di dimensione 1 è del tipo:

$$W = \text{Span}(OP_1) = \{OP \in V_O \mid OP = t OP_1, t \in \mathbb{R}\},$$

dove $P_1 \neq O$ ed il punto P varia sulla retta r per O e per il punto P_1 . Fissato $OQ_0 \in V_O$, la corrispondente sottovarietà parallela è:

$$(5.3) \quad W' = \{OQ \in V_O \mid OQ = t OP_1 + OQ_0, t \in \mathbb{R}\}.$$

Notiamo che al variare di $OP \in W$ il secondo estremo di OQ varia sulla retta r' passante per Q_0 e *parallela* alla retta r .

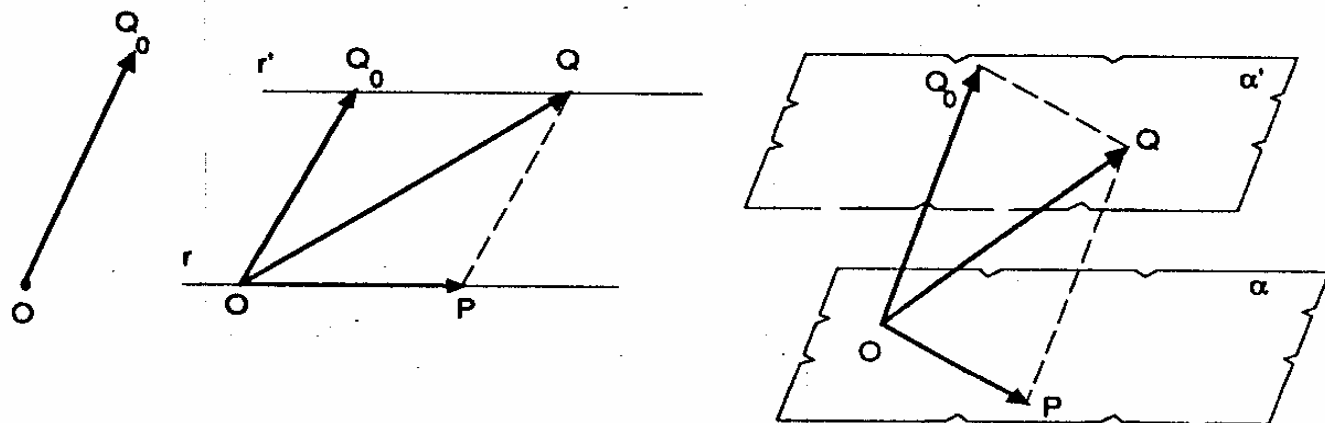
Sottovarietà affini di dimensione 2. Un sottospazio W di dimensione 2 è del tipo:

$$W = \text{Span}(OP_1, OP_2) = \{OP = t OP_1 + t' OP_2, t, t' \in \mathbb{R}\},$$

dove i punti O, P_1, P_2 non siano allineati ed il punto P varia sul piano da essi determinato. Fissato $OQ_0 \in V_O$, la corrispondente sottovarietà parallela è:

$$(5.4) \quad W' = \{OQ \in \mathcal{V}_O \mid OQ = t OP_1 + t' OP_2 + OQ_0, t, t' \in \mathbb{R}\}.$$

Notiamo che al variare di $OP \in W$ il secondo estremo di OQ varia sul piano α' per Q_0 e parallelo al piano α .



Viceversa è immediato vedere che, data comunque una retta r' , l'insieme dei vettori OQ , dove $Q \in r'$, si può scrivere nella forma (5.3), basta fissare *arbitrariamente* un punto $Q_0 \in r'$ e considerare come sottospazio parallelo i vettori di secondo estremo P variabile sulla retta r per O parallela ad r' . Stesso discorso vale nel caso di un piano α' .

Se consideriamo lo spazio bidimensionale $\mathcal{V}_O$ si hanno gli stessi risultati per le sottovarietà di dimensione 0 e 1. ♣

In $\mathbb{R}^n$ un sistema compatibile $Ax = b$ fornisce *equazioni cartesiane* (lineari) per la sottovarietà affine Δ' delle sue soluzioni; dal teorema di struttura si ha $\Delta' = \Delta + \xi_0$ e quindi Δ' è parallela al sottospazio Δ le cui *equazioni cartesiane* sono date dal sistema omogeneo $Ax = 0$.

Spesso Δ è detto *spazio nullo* o anche *nucleo* della matrice A e si indica con $\Delta = \ker(A)$. Ciò è legato alla interpretazione di A come "operatore lineare", come vedremo nel Capitolo 5, dove è provato che (cfr.i) di 1.6):

$$\dim(\Delta) = \dim(\ker(A)) = n - r, \quad r = \operatorname{rg}(A).$$

Lo studente che lo desideri può leggere già da ora tale dimostrazione; essa è basata sul fatto che i vettori numerici $v_1, \dots, v_{j_1-1}, v_{j_1+1}, \dots, v_n$, ottenuti con una E.G. nella (5.17') del Capitolo 1, sono una base di Δ .

5.5 ESERCIZIO. Si considerino i due sistemi lineari

$$(a) \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (b) \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 3. \\ x_1 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Dire se ciascuno di essi rappresenta o meno equazioni cartesiane per una

sottovarietà affine. In caso affermativo determinare la dimensione.

Si tratta di verificare innanzi tutto la compatibilità dei sistemi dati. Questo si può fare simultaneamente visto che la matrice dei coefficienti di (a) e (b) è la stessa, facendo uso dell'E.G. Si ottiene la forma a scala ed i termini noti (rispettivamente per (a) e (b)):

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{array} \right|$$

Nel caso (a) quindi il sistema è incompatibile, pertanto non rappresenta una sottovarietà affine. Nel caso (b) il sistema è compatibile e quindi rappresenta una sottovarietà affine W' . La sua dimensione è la dimensione del sottospazio parallelo W che è rappresentato dal sistema omogeneo associato; poiché dalla riduzione a scala si legge che la matrice dei coefficienti ha rango 2 se ne deduce che $\dim(W) = 1$. Le equazioni date in (b) non sono quindi tutte essenziali; lo stesso sottospazio W' può essere rappresentato con due sole equazioni, per esempio le prime due. ♥

5.6 SOTTOVARIETÀ AFFINI DI $\mathbf{R}^3$: EQUAZIONI CARTESIANE MINIME. Esaminiamo in dettaglio lo spazio $\mathbf{R}^3$ in cui indichiamo con x, y, z le componenti dei vettori.

Sottovarietà affini di dimensione 2: sono rappresentate dal sistema (costituito da una sola equazione):

$$(5.7) \quad ax + by + cz + d = 0 \quad A = \begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix}, \quad \text{rg}(A) = 1,$$

al variare di a, b, c, d (con a, b, c non sono tutti nulli); il sottospazio parallelo ha equazione:

$$ax + by + cz = 0.$$

Sottovarietà affini di dimensione 1: sono rappresentate dal sistema:

$$(5.8) \quad \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \quad A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}, \quad \text{rg}(A) = 2,$$

al variare dei parametri $a, b, \dots, d'$. Il sottospazio parallelo ha equazioni:

$$\begin{array}{l} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0. \end{array}$$

Sottovarietà affini di dimensione 0: sono rappresentate dal sistema:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' &= 0 \end{aligned} \quad A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \text{rg}(A) = 3,$$

al variare dei parametri $a, b, \dots, d''$. Il sottospazio parallelo è rappresentato dal sistema:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0 \end{aligned}$$

che ammette come unica soluzione il vettore nullo. ♣

Per le sottovarietà affini W' di $\mathbb{R}^n$ si possono dare anche *equazioni parametriche*: basta fissare una base per il sottospazio parallelo W ed esprimere i suoi vettori come combinazione lineare di una base; i pesi sono i parametri al variare dei quali varia il vettore in W .

5.10 SOTTOVARIETÀ AFFINI DI $\mathbb{R}^3$: EQUAZIONI PARAMETRICHE.

Sottovarietà affini di dimensione 0: fissato un vettore $v_0 \in \mathbb{R}^3$ di componenti x_0, y_0, z_0 la sottovarietà parallela a $W = \{0\}$ è $W' = \{v_0\}$.

Sottovarietà affini di dimensione 1. Sia $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = tv; v \neq 0\}$, se indichiamo con x, y, z le componenti di x e con l, m, n quelle del generatore v e si ottengono le *equazioni parametriche* del sottospazio:

$$x = lt, \quad y = mt, \quad z = nt \quad t \text{ parametro reale.}$$

Fissato un vettore $v_0 \in \mathbb{R}^3$, la corrispondente sottovarietà parallela è: $W' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = tv + v_0\}$ cui corrispondono le *equazioni parametriche*:

$$(5.11) \quad x = lt + x_0, \quad y = mt + y_0, \quad z = nt + z_0 \quad t \text{ parametro reale.}$$

Sottovarietà affini di dimensione 2. In questo caso $W = \text{Span}(v, v')$; indicate con l, m, n e l', m', n' le componenti dei vettori di base e tali quindi che risulti:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 2,$$

si ha $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = tv + t'v', \quad t, t' \in \mathbb{R}\}$ e se indichiamo con x, y, z le componenti di un vettore variabile in W si ottengono le *equazioni parametriche* del sottospazio:

$$x = lt + l't', \quad y = mt + m't', \quad z = nt + n't', \quad t, t' \in \mathbb{R}.$$

Fissato un vettore $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$, la corrispondente sottovarietà parallela è: $W' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = t\mathbf{v} + t'\mathbf{v}' + \mathbf{v}_0\}$ e se indichiamo con x, y, z le coordinate di un vettore $\mathbf{x}$ variabile in W' si ottengono le *equazioni parametriche*:

$$(5.12) \quad x = lt + l't' + x_0, \quad y = mt + m't' + y_0, \quad z = nt + n't' + z_0, \quad t, t' \in \mathbb{R}. \quad \clubsuit$$

5.13 ISOMORFISMO FRA $\mathcal{V}_O$ ED $\mathbb{R}^3$.

Riprendiamo l'osservazione 3.3 con riferimento al *modello geometrico* $\mathcal{V}_O$ di spazio vettoriale tridimensionale su $\mathbb{R}$. Fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ come in (2.11) ad ogni vettore *geometrico* $\mathbf{OQ} \in \mathcal{V}_O$, $\mathbf{OQ} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, possiamo associare il vettore *numerico* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ le cui componenti x, y, z sono le coordinate di $\mathbf{OQ}$ rispetto alla base fissata e viceversa. Notiamo che, mentre in $\mathbb{R}^3$ vi è una base privilegiata, la *base canonica* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, in $\mathcal{V}_O$ non vi è alcuna base privilegiata ma, fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, si ha la corrispondenza biunivoca $\mathcal{V}_O \rightarrow \mathbb{R}^3$ la quale, in particolare, fa corrispondere ordinatamente alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Si vede subito che alla somma di vettori in $\mathcal{V}_O$ resta associata la somma dei vettori corrispondenti in $\mathbb{R}^3$ ed analogamente per il prodotto per uno scalare. Da ciò segue che ad ogni sottovarietà affine (in particolare sottospazio) di $\mathcal{V}_O$ resta associata una sottovarietà affine di $\mathbb{R}^3$ e viceversa. Se ai vettori $\mathbf{OQ}_0, \mathbf{OP}_1, \mathbf{OP}_2 \in \mathcal{V}_O$ di (5.2) corrispondono, nella base fissata, i vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$ di (5.10), le (5.3) corrispondono alle equazioni parametriche (5.11) che per questo motivo si chiamano equazioni parametriche di una *retta*, così come le (5.4) corrispondono alle (5.12) che si chiamano equazioni parametriche di un *piano*. $\clubsuit$

In $\mathbb{R}^n$ si può facilmente passare da equazioni cartesiane di una sottovarietà a equazioni parametriche e viceversa. Se è dato un sistema di equazioni cartesiane basta trovare le soluzioni in funzione di parametri liberi (ottenuti tramite una E.G.). Viceversa se sono date equazioni parametriche basta *eliminare* i parametri nel modo che illustriamo sul seguente:

5.14 ESERCIZIO. *Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ generato dai vettori:*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

A priori, combinando linearmente i tre vettori assegnati, otteniamo certamente equazioni parametriche per il vettore variabile in W in funzione di tre parametri; ma se i tre vettori assegnati non sono indipendenti, e quindi non sono una base, i coefficienti della combinazione lineare non sono unici (cfr. 2.3) e sono "sovabbondanti". Conviene preventivamente estrarre

dal sistema di generatori una base. Consideriamo quindi la matrice A che ha per colonne i vettori dati e una sua riduzione a scala S :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

I vettori v_1 e v_2 sono quindi una base di W e le corrispondenti equazioni parametriche sono:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = t_1 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} + t_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{aligned} x_1 &= t_1 \\ x_2 &= -t_1 + 2t_2 \\ x_3 &= -t_2 \\ x_4 &= 2t_1 \end{aligned}$$

Per trovare equazioni cartesiane ricaviamo t_1 e t_2 da due delle equazioni parametriche già trovate e sostituiamo tali valori nelle equazioni residue. Se si ricavano i parametri dalla prima e dalla terza equazione si ottiene $t_1 = x_1$, $t_2 = -x_3$ e la sostituzione nelle equazioni residue fornisce $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, $-2x_1 + x_4 = 0$, cioè un sistema di equazioni cartesiane.♡

Se ripetiamo quanto visto nell'esercizio a partire dalle equazioni (5.11) otteniamo equazioni del tipo (5.8) che prendono il nome di equazioni cartesiane di una *retta*; a partire da (5.12) otteniamo un'equazione del tipo (5.7) che prende il nome di equazione cartesiana di un *piano*.

5.E Esercizi

1. Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio W generato dai vettori:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

2. Trovare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio W di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Scrivere equazioni cartesiane per la sottovarietà affine di $\mathbf{R}^3$ ottenuta traslando il sottospazio $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ con il vettore $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Scrivere equazioni parametriche per la sottovarietà di $\mathbf{R}^4$ ottenuta traslando il sottospazio di equazioni cartesiane $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$, $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ con il vettore di componenti 1, 0, 1, 1.

5. Dire se le equazioni $x + y + 3z = 0$, $-x + 2y + z = -3$, $2x - y + 2z = 3$ definiscono una sottovarietà affine di $\mathbf{R}^3$ ed in caso affermativo determinarne la dimensione ed equazioni parametriche.

6. INTERSEZIONE E SOMMA DI SOTTOSPAZI: SOMME DIRETTE

Siano U e W due sottospazi dello spazio vettoriale V sul campo $K(= \mathbf{R}, \mathbf{C})$; a partire da essi possiamo costruire altri due sottospazi di V : il "sottospazio intersezione" ed il "sottospazio somma" definiti nel modo seguente.

6.1 Definizione. *Dati i sottospazi $U, W \subseteq V$:*

- i) si chiama sottospazio intersezione, e si indica con $U \cap W$, l'insieme dei vettori che appartengono simultaneamente ad U e W ,
- ii) si chiama sottospazio somma, e si indica con $U + W$, l'insieme dei vettori di V della forma $u + w$, al variare di $u \in U$ e di $w \in W$. ♣

Perché le definizioni poste abbiano senso dobbiamo provare che $U \cap W$ e $U + W$ sono effettivamente dei sottospazi.

Siano $x, y \in U \cap W$, quindi $x, y \in U$ e $x, y \in W$; poiché U è un sottospazio il vettore $x + y$ appartiene ad U , analogamente esso appartiene a W e quindi appartiene a $U \cap W$. Se $x \in U \cap W$ e $\lambda \in K$ abbiamo che $\lambda x \in U$ e $\lambda x \in W$; essendo U e W sottospazi $\lambda x \in U$ e $\lambda x \in W$, pertanto $\lambda x \in U \cap W$. Abbiamo quindi provato che $U \cap W$ è un sottospazio (in quanto chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare).

Siano ora $x, y \in U + W$; per definizione $x = u + w$, $y = u' + w'$ per qualche $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$. Risulta $x + y = u + w + u' + w' = (u + u') + (w + w')$, e poiché $u + u' \in U$ e $w + w' \in W$ anche $x + y \in U + W$.

Se $x \in U + W$ e quindi è della forma $x = u + w$ per qualche $u \in U$ e $w \in W$ e se $\lambda \in K$ abbiamo che $\lambda x = \lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w$; poiché $\lambda u \in U$ e $\lambda w \in W$ anche $\lambda x \in U + W$. Abbiamo con ciò provato che $U + W$ è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per uno scalare.

6.2 OSSERVAZIONE. Lo studente avrà notato che $U \cap W$ è definito tramite l'operazione di "intersezione" fra insiemi (non così $U + W$) e può chiedersi perché non abbiamo tentato di definire un ulteriore sottospazio facendo uso dell'operazione di "unione" fra insiemi, cioè $U \cup W$. Il motivo è semplice: $U \cup W$ non è un sottospazio. Per provare questa affermazione basta produrre un "controesempio", cioè un esempio in cui l'affermazione fatta sia falsa. Si consideri a tal scopo il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^2$ costituito da quei vettori di $\mathbb{R}^2$ che hanno la prima coordinata nulla ed il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^2$ costituito dai vettori che hanno la seconda coordinata nulla. L'insieme $U \cup W$ è costituito da quei vettori che hanno o la prima o la seconda coordinata nulla. Ora i vettori della base canonica e_1 e e_2 appartengono a $U \cup W$ ($e_1 \in W$, $e_2 \in U$) ma la loro somma non vi appartiene in quanto nessuna delle sue componenti è nulla e quindi $U \cup W$ non è chiuso rispetto alla somma.

Così come abbiamo spiegato nell'osservazione 5.11 del capitolo 1, l'affermazione " $U \cup W$ non è un sottospazio" non vuol dire che non lo sia mai! ♥

6.3 ESERCIZIO. Sia U il sottospazio di equazioni $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_4 = 0$ e sia $W = \text{Span}(w_1, w_2)$ dove w_1 e w_2 hanno rispettivamente componenti 1, 1, 1, 1 e 0, 1, 0, -1. Determinare una base per $U + W$ e per $U \cap W$.

Una base per U è data dai vettori u_1 e u_2 di componenti rispettivamente 1, 1, 0, 0 e -1, 0, 1, 0. Poiché $U + W$ è costituito dai vettori $u + w$ al variare di $u \in U$ e $w \in W$, i vettori u_1, u_2, w_1, w_2 sono un sistema di generatori dal quale, tramite l'E.G. possiamo estrarre una base, si trova quindi che essa è costituita dai primi tre vettori e $\dim(U + W) = 3$.

Per determinare equazioni cartesiane di $U \cap W$ conviene trovare equazioni cartesiane per W . A partire dalle equazioni parametriche $x_1 = t$, $x_2 = t + t'$, $x_3 = t$, $x_4 = t - t'$ si ricavano le equazioni cartesiane $x_1 - x_3 = 0$, $2x_1 - x_2 - x_4 = 0$. Poiché appartengono a $U \cap W$ tutti e soli i vettori che sono simultaneamente in U e W essi devono verificare le equazioni di entrambi i sottospazi. Si ottiene quindi un sistema di 4 equazioni in 4 incognite la cui matrice dei coefficienti ha rango 3 (verificarlo!). Pertanto $\dim(U \cap W) = 1$ ed una base è costituita per esempio dal vettore di componenti 1, 2, 1, 0. ♥

Notiamo che, se $u_1, \dots, u_h$ è una base per U e $w_1, \dots, w_k$ è una base per W , i vettori $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$ generano $U + W$.

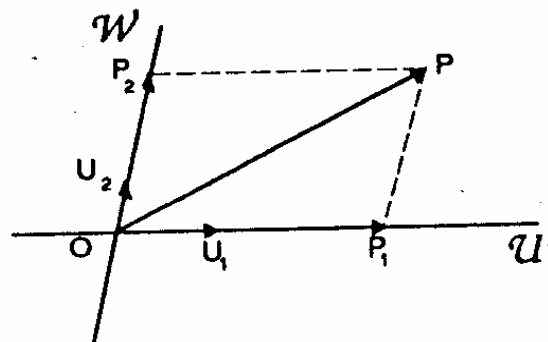
6.4 Definizione. Si dice che due sottospazi $U, W \subset V$ decompongono lo spazio vettoriale V in somma diretta, e si indica:

$$V = U \oplus W,$$

se ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico nella forma:

$$v = u + w \quad \text{con } u \in U, w \in W.$$

Per esempio lo spazio vettoriale V'_O (di dimensione 2) è somma diretta di due rette $U = \text{Span}(OU_1)$ e $W = \text{Span}(OU_2)$ dove i punti $O, U_1, U_2 \in \mathcal{E}^2$ non sono allineati (perchè?). V'_O è somma diretta di un piano e di una retta (non contenuta nel piano).



6.5 Proposizione. Siano U e W sottospazi di V . Risulta $V = U \oplus W$ se e solo se:

$$(6.6) \quad V = U + W, \quad U \cap W = \{o\}.$$

Dim. Se V è somma diretta di U e W ovviamente risulta $V = U + W$. D'altra parte se $U \cap W \neq \{o\}$ esiste $u \in U$ e $w \in W$ tali che $u = w \neq o$; pertanto $o = o + o = u - w$ e la decomposizione del vettore nullo non sarebbe unica.

Viceversa supponiamo che valgano le due condizioni (6.6), vogliamo provare che ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come somma di un vettore in U e di un vettore in W . Supponiamo che si abbia simultaneamente $v = u + w$ e $v = u' + w'$ con u e u' in U e w e w' in W ; sottraendo abbiamo $o = (u - u') + (w - w')$ e quindi $u - u' = -(w - w')$. Il vettore a primo membro, che è un vettore di U , è uguale al vettore a secondo membro che è un vettore in W , quindi tale vettore è in $U \cap W$. Poiché tale intersezione contiene solo il vettore nullo deve necessariamente essere $u = u'$ e $w = w'$.

6.7 Proposizione. $V = U \oplus W$ se e solo se, dette $u_1, \dots, u_h$ una base in U e $w_1, \dots, w_k$ una base in W , i vettori $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$ sono una base di V .

Dim. Supponiamo che valga la decomposizione in somma diretta; la relazione $o = (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_h u_h) + (\beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k)$ implica $o = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_h u_h$ e $o = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k$ in quanto per il vettore nullo vale l'unica decomposizione $o = o + o$; pertanto $\alpha_1 = \dots = \alpha_h = 0$, $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ e l'indipendenza dei vettori è provata. D'altra parte essi generano in

quanto $U + W = V$ (cfr. 6.5). Viceversa se i vettori proposti sono una base di V per ogni $v \in V$ si ha la decomposizione unica $v = (a_1 u_1 + \dots + a_h u_h) + (b_1 w_1 + \dots + b_k w_k) = u + w$, dove $u = a_1 u_1 + \dots + a_h u_h \in U$ e $w = b_1 w_1 + \dots + b_k w_k \in W$. ♣

6.8 ESERCIZIO. Sia $U = \text{Span}(u_1, u_2)$ dove u_1 ed u_2 sono i vettori di $\mathbb{R}^4$ di componenti $1, 1, 1, 1$ e $-1, 1, -1, 1$. Determinare un sottospazio W tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Osserviamo innanzi tutto che i vettori u_1, u_2 sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di U . Completiamo ora questi vettori ad una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungendo, per esempio, i vettori canonici e_1, e_2 (tramite l'E.G. verifichiamo facilmente che e_1, e_2, u_1, u_2 sono una base di $\mathbb{R}^4$). Pertanto si può assumere $W = \text{Span}(e_1, e_2)$. Naturalmente questa scelta non è unica! ♥

6.9 ESERCIZIO. Si considerino i sottospazi U , di equazioni cartesiane $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, $-x_1 + x_4 = 0$, e $W = \text{Span}(w_1, w_2)$, dove w_1 ha componenti $1, 1, 2, 0$ e w_2 ha componenti $-2, 0, 0, 1$. Verificare che risulta $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

I due vettori che generano W sono indipendenti, pertanto $\dim(W) = 2$. Le soluzioni del sistema che rappresenta U sono $\xi_1 = x_4$, $\xi_2 = -2x_3 - x_4$, $\xi_3 = x_3$, $\xi_4 = x_4$ ed i vettori u_1 e u_2 , di componenti rispettivamente $0, -2, 1, 0$ e $1, -1, 0, 1$, sono una base di U . A questo punto basta controllare, tramite l'E.G., che w_1, w_2, u_1, u_2 siano indipendenti. ♥

Vogliamo infine vedere, dati due sottospazi U e W , quale relazione intercorra fra le loro dimensioni e quelle dei sottospazi $U + W$ e $U \cap W$.

6.10 FORMULA DI GRASSMANN. Dati due sottospazi $U, W \subset \mathbb{R}^n$ si ha la seguente formula:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Dim.* Indichiamo con $u_1, u_2, \dots, u_h$ una base per U e con $w_1, w_2, \dots, w_k$ una base per W . I vettori $u_1, u_2, \dots, u_h, w_1, w_2, \dots, w_k$ sono un sistema di generatori per il sottospazio $U + W$. Sia Q la matrice $n \times (h+k)$ che ha come vettori colonna i generatori indicati; risulta (cfr. 4.4): $\dim(U + W) = \text{rg}(Q)$.

Consideriamo ora il sottospazio $U \cap W \subset \mathbb{R}^n$ ed il sottospazio Δ dei vettori soluzione del sistema omogeneo, in $h+k$ incognite, $Qx = 0$. È ovvio che non sono lo stesso sottospazio, visto che il primo è costituito da vettori con n componenti ed il secondo da vettori con $h+k$ componenti; ciò non di meno essi hanno la stessa dimensione. Per provare questa affermazione consideriamo l'applicazione $\varphi: \ker(Q) \rightarrow U \cap W$ definita nel

modo seguente. Sia $\xi \in \Delta$, di componenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, cioè tale che $Q\xi = 0 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_h u_h + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k$ e quindi $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_h u_h = -(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k) = y$. In questa uguaglianza il vettore y è scritto sia nella base di U che in quella di W e quindi appartiene a $U \cap W$; poniamo quindi per definizione $\varphi(\xi) = y$. L'applicazione φ è *biunivoca* in quanto se prendiamo un qualunque vettore $y \in U \cap W$ esso può scriversi sia nella base di U che in quella di W ed in entrambi i casi le coordinate sono uniche; esso proviene, nell'applicazione φ , dall'unico vettore che ha per componenti (nell'ordine) le coordinate di y nella base di U e quelle nella base di W con segno opposto. Questa *applicazione biunivoca*, per il modo in cui è stata definita in termini di coordinate, conserva chiaramente le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare (come vedremo nella sezione 4 del capitolo 6 si tratta di un "isomorfismo"), quindi a vettori linearmente indipendenti nel primo spazio corrispondono, via φ , vettori linearmente indipendenti nel secondo spazio e viceversa. In conclusione abbiamo provato che $\dim(U \cap W) = \dim(\ker(Q)) = h + k - \text{rg}(Q)$. La tesi è quindi provata.

6.E Esercizi

1. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio $U = \text{Span}(u_1, u_2)$ ed il sottospazio $W = \text{Span}(w_1, w_2, w_3)$; determinare una base per $U \cap W$ e per $U + W$:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2. In $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio $U = \text{Span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ed il sottospazio $W = \text{Span}(w_1, w_2, w_3)$; trovare le dimensioni di U , W , $U + W$, $U \cap W$:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^3$: $U = \text{Span}(u_1, u_2)$ e $W = \text{Span}(w_1, w_2)$; dire se essi decompongono $\mathbb{R}^3$ in somma diretta:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Determinare una base per il sottospazio $U \cap W \subset M_2(\mathbb{R})$ sapendo che U e W sono generati rispettivamente dalle matrici:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Dare un esempio di due sottospazi U e $W \subset \mathcal{V}_0$ per i quali $U \cup W$ sia un sottospazio.

6. Vedere se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti ed in caso affermativo completarli ad una base di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

7. ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

ESERCIZIO I

1. Si consideri, al variare del parametro reale t , la matrice:

$$A_t = \begin{vmatrix} 1+t & 0 & 2t+2 & 0 \\ 1 & 0 & 2+t & -3t+1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Determinare $rg(A_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ e vedere se esistono valori di t per cui il vettore di componenti $-1, 0, 0$ appartiene allo spazio generato dai vettori colonna di A_t .

2. Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$; dire se è vero o falso che, se esistono in $\mathbb{R}^n$ due vettori x, y tali che $Ax = Ay$, allora $x = y$. Giustificare la risposta.

ESERCIZIO II

1. Si considerino le matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & k \end{vmatrix}$$

al variare del numero reale k . Determinare per quali valori di k il sistema $AX = B$, nell'incognita $X \in M_{32}(\mathbb{R})$, ammette soluzioni.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazioni cartesiane $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$ e $W = \text{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, dove:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 8 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1/3 \end{vmatrix}.$$

Determinare basi per U e W e provare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

3. Provare che se si effettua sulla seguente matrice A l'E.G.↓ senza scambi di righe si ottiene la fattorizzazione $A = LDU$ dove $L^T = U$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

ESERCIZIO III

1. Sia $W \subseteq M_{23}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle matrici C i cui vettori colonna c^1, c^2, c^3 soddisfano la relazione $c^1 - 2c^2 + c^3 = 0$. Provare che W è un sottospazio. Trovare una base e la dimensione di W .

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ determinare una base per i sottospazi $U+W$ e $U \cap W$, sapendo che U e W sono generati rispettivamente da:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{w}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix}.$$

3. Teorema degli orlati. Sia $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$; provare che $\text{rg}(A) = r$ se e solo se esiste una sottomatrice A' di A , quadrata di ordine r non singolare tale che ogni altra sottomatrice A'' , ottenuta da A' aggiungendo comunque una ulteriore riga e colonna di A , sia singolare.

ESERCIZIO IV

1. Decidere se il seguente sistema è compatibile ed in caso affermativo

scriverne le soluzioni tramite il teorema di struttura:

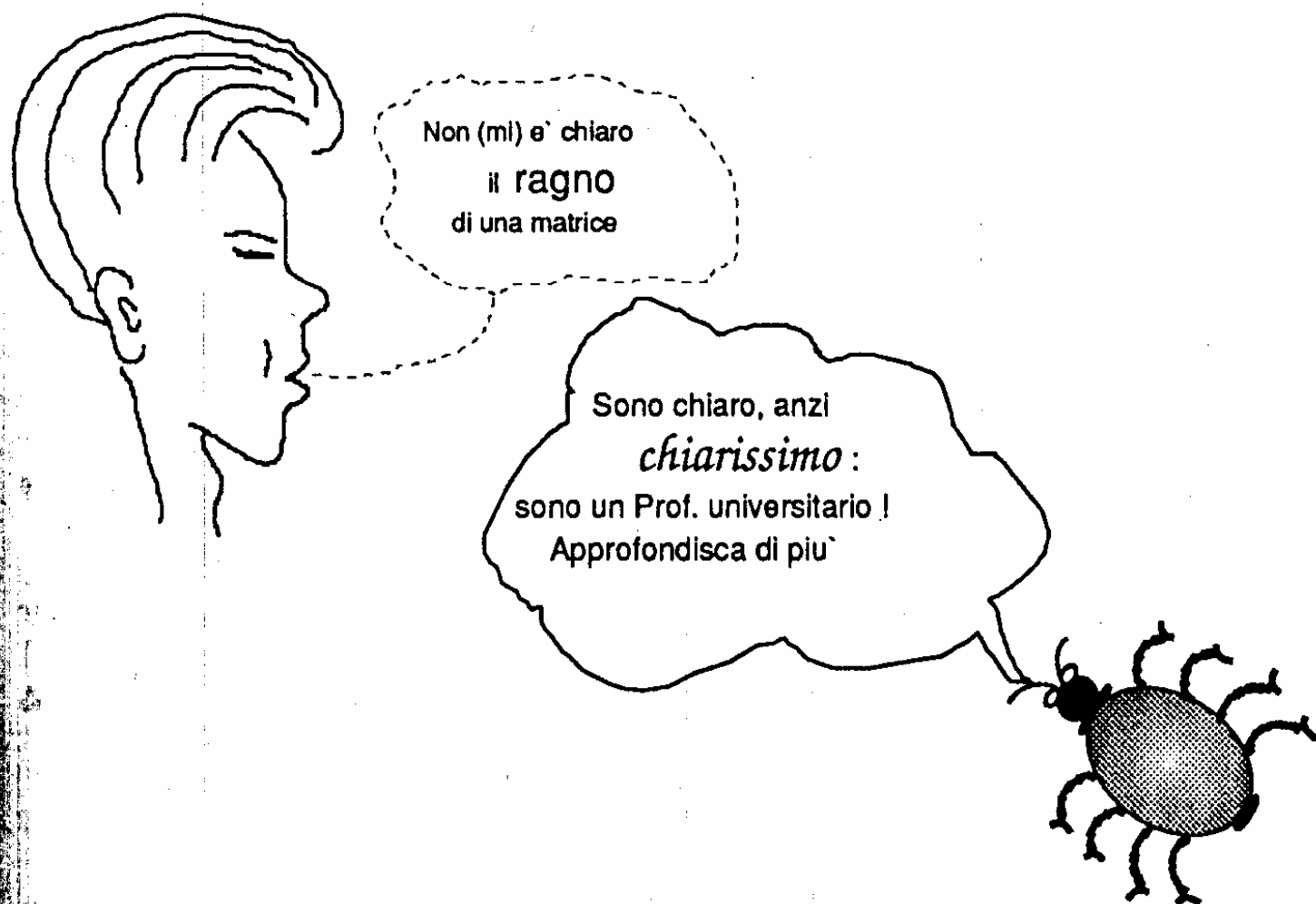
$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\x_2 + x_3 + x_4 &= -3 \\x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\x_4 + x_5 &= -1.\end{aligned}$$

2. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ dove A è una matrice singolare. Provare che le matrici AB e BA sono singolari.

3. Sia $W \subset M_3(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici triangolari superiori e si consideri la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vedere se A, A^2, A^3 sono una base di W . In caso negativo dire se A e A^2 possono essere completate ad una base di W .



Capitolo 3

DETERMINANTI

INTRODUZIONE. In questo capitolo viene introdotta la nozione di “determinante” di una matrice quadrata a partire da una formula (probabilmente già nota allo studente per matrici di ordine piccolo) che fa intervenire la nozione di “permutazione.” Lo studio e la generazione delle permutazioni permette in modo facile di avere subito lo “sviluppo di Laplace.” Successivamente studiamo le proprietà formali del determinante e l’eliminazione di Gauss fornisce sia una dimostrazione dell’unicità della funzione determinante che un metodo efficiente di calcolo.

Come applicazioni diamo l’espressione algebrica per l’inversa di una matrice quadrata non singolare e la formula di Cramer per la soluzione unica di sistemi quadrati con matrice dello stesso tipo. Da ultimo diamo una breve nota storica sullo sviluppo dell’algebra lineare senza pretesa di completezza ma perché lo studente si renda conto del periodo in cui si sono sviluppate le idee fondamentali e conosca, almeno di nome, alcuni dei matematici che vi hanno contribuito.

1. LE PERMUTAZIONI DI n ELEMENTI

In questa sezione vogliamo introdurre la nozione di “permutazione” e mettere in evidenza alcune proprietà che saranno utili in seguito.

1.1 Definizione. Una permutazione σ su n elementi è un’applicazione biunivoca (e quindi invertibile) σ di un insieme di n elementi $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ in sè. ♣

Di solito si sceglie l’insieme dei numeri $\{1, 2, \dots, n\}$ e quindi:

$$\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

Consideriamo l’insieme *ordinato* dei numeri $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ costituito rispettivamente dai corrispondenti degli elementi $1, 2, \dots, n$. La permutazione $\sigma(1)=1, \sigma(2)=2, \dots, \sigma(n)=n$, viene detta permutazione

identica (o anche permutazione *fondamentale*); essa corrisponde all'ordinamento naturale (crescente) dei numeri $1, 2, \dots, n$. Ogni altra permutazione determina un diverso ordinamento e viceversa ogni ordinamento dei numeri $\{1, \dots, n\}$ determina una permutazione. Così, ad esempio, la permutazione che manda 1 in $\sigma(1)=3$, 2 in $\sigma(2)=5$, 3 in $\sigma(3)=2$, 4 in $\sigma(4)=4$, 5 in $\sigma(5)=1$ determina l'ordinamento 3 5 2 4 1; viceversa l'ordinamento 5 2 4 3 1 corrisponde alla permutazione che manda 1 in $\sigma(1)=5$, 2 in $\sigma(2)=2$, 3 in $\sigma(3)=4$, 4 in $\sigma(4)=3$, 5 in $\sigma(5)=1$.

1.2 GENERAZIONE DELLE PERMUTAZIONI SU n ELEMENTI. Indichiamo con S_n l'insieme delle permutazioni su n elementi; vogliamo ora contare il numero N di elementi che esso contiene al variare di n .

Consideriamo inizialmente i casi $n = 1, 2, 3$:

	<u>permutazioni</u>		
$n = 1$	1		$N = 1$
$n = 2$	1 2 2 1		$N = 2$
$n = 3$	1 2 3 1 3 2 2 3 1 2 1 3 3 1 2 3 2 1		$N = 6 = 3 \cdot 2$

Osserviamo che abbiamo scritto sulla stessa riga le permutazioni che hanno lo stesso elemento iniziale. Nel caso $n = 3$ le permutazioni sulla prima riga hanno al primo posto 1 e gli altri posti sono occupati dalle due permutazioni degli elementi dell'insieme $\{2, 3\}$; sulla seconda hanno al primo posto 2 e gli altri posti sono occupati dalle due permutazioni degli elementi dell'insieme $\{1, 3\}$; analogamente per la terza riga. Questo spiega la fattorizzazione $N = 6 = 3 \cdot 2$. Ovviamente la stessa osservazione si può fare nel caso $n = 2$.

Consideriamo quindi il caso di $n = 4$. Le permutazioni avranno al primo posto uno dei numeri $1, 2, 3, 4$; quelle che iniziano con 1 hanno nei successivi posti una qualunque delle permutazioni sull'insieme di tre elementi $\{2, 3, 4\}$; quelle che iniziano con 2 avranno le permutazioni di $\{1, 3, 4\}$; quelle che iniziano con 3 avranno le permutazioni di $\{1, 2, 4\}$; infine quelle che iniziano con 4 avranno le permutazioni di $\{1, 2, 3\}$. Abbiamo suddiviso l'insieme delle permutazioni su quattro elementi in quattro gruppi, ciascuno costituito da $6 = 3 \cdot 2$ elementi; pertanto $N = 4 \cdot 3 \cdot 2$. In questo modo non solo abbiamo contato il numero delle permutazioni su quattro elementi ma abbiamo anche

indicato un modo con cui *generarle* tutte a partire dalle permutazioni su tre elementi.

Supponiamo di aver generato *ricorsivamente* le permutazioni su $n-1$ elementi e di aver trovato che sono in numero di $(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2$, ($m!$ si legge " m fattoriale" ed indica il prodotto dei primi m interi positivi). Le permutazioni su n elementi si suddividono in n gruppi a seconda dell'elemento al primo posto: se il primo elemento è k i rimanenti posti sono occupati da una qualunque delle $(n-1)!$ permutazioni di $\{1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$. Pertanto il numero degli elementi di S_n è $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2$. Abbiamo inoltre dato un procedimento *ricorsivo* per costruire le permutazioni su n elementi, procedimento che può facilmente essere implementato su un calcolatore. ♡

Ad ogni permutazione $\sigma \in S_n$ resta associato un "segno" che è o l'intero 1 o l'intero -1 . Per spiegare in quali casi si attribuisca uno o l'altro dei segni partiamo da un esempio. Consideriamo la permutazione 3 1 5 2 4; possiamo riportarla alla permutazione fondamentale riordinando i numeri sulla seconda riga con la regola di scambiarli a due a due. Scambiamo inizialmente 3 con 1, poi 2 con 3, poi 3 con 5 ed in fine 5 con 4; con i vari passaggi indicati si ottiene la permutazione fondamentale. In totale abbiamo effettuato "quattro scambi". Lo studente non deve però cadere nell'errore che vi sia un sol modo di effettuare tali scambi né che sia costante il loro numero. A tale scopo consideriamo un'altro esempio. Sia data la permutazione 3 2 1 è immediato che con lo scambio di 1 e 3 si ottiene la permutazione fondamentale (*uno scambio*). Si può d'altra parte scambiare prima 1 con 2, poi scambiare 1 con 3 ed infine lo scambio di 2 con 3 porta alla permutazione fondamentale (*tre scambi*)!

Di fatto si può dimostrare che *il numero degli scambi necessari per riportare la permutazione σ a quella fondamentale è o sempre pari oppure sempre dispari*. Corrispondentemente σ si dice di classe pari oppure dispari. Si pone quindi la seguente:

1.3 Definizione. Per ogni permutazione $\sigma \in S_n$ il suo segno è dato da $\text{sgn}(\sigma) = \pm 1$, valendo il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che σ sia di classe pari o dispari. ♣

La permutazione del primo esempio ha segno $+1$ mentre quella del secondo esempio ha segno -1 . Nel caso $n=3$ della tabella 1.2 sulla prima colonna vi sono le permutazioni pari, sulla seconda quelle dispari.

1.4 Proposizione. Sia σ una permutazione degli elementi $\{1, 2, \dots, n\}$; indicato con $\sigma(1) = k$ il primo elemento e con σ' la parte residua (una

permutazione degli elementi $\{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$) risulta:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm \operatorname{sgn}(\sigma')$$

a seconda che l'intero k sia dispari o pari.

Dim. Per riportare σ alla permutazione fondamentale si può tener fisso il primo elemento ed effettuare scambi sulla parte residua σ' fino a riportarla alla permutazione fondamentale; si ottiene $k \ 1 \ \dots \ k-1 \ k+1 \ \dots \ n$ e si deve ancora scambiare k con $1, \dots, k-1$. Pertanto se $k-1$ è pari si ha $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma')$, se $k-1$ è dispari si ha $\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma')$. ♣

Ricordiamo infine che due permutazioni $\sigma, \sigma' \in S_n$ si possono comporre in quanto applicazioni e le composizioni:

$$\sigma' \cdot \sigma : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sigma} \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sigma'} \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\sigma \cdot \sigma' : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sigma'} \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sigma} \{1, 2, \dots, n\}$$

sono ancora permutazioni. In questo modo S_n è munito di una *operazione* binaria interna rispetto alla quale la permutazione identica si comporta da elemento neutro. D'altra parte ogni permutazione σ , in quanto applicazione invertibile, ammette una permutazione inversa $\sigma^{-1} \in S_n$. Abbiamo dunque un esempio di insieme con una struttura di "gruppo", struttura che lo studente avrà occasione di incontrare in altri corsi.

2. LA DEFINIZIONE DI DETERMINANTE

In questa sezione vogliamo introdurre la funzione *determinante*, cioè un'applicazione

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che associ ad ogni matrice quadrata A un numero reale $\det(A)$ e che, cosa molto importante, verifichi alcune proprietà fondamentali che introdurremo nella prossima sezione.

Nel caso delle *matrici di ordine uno* si pone:

$$(2.1) \quad \det |a_{11}| = a_{11};$$

questa è chiaramente una funzione $\det : M_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, ma non l'unica possibile anche se sembra la più naturale.

Nel caso delle *matrici di ordine due* si pone:

$$(2.2) \quad \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

si determina così un'applicazione $\det : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Non è chiaro a priori perchè si è fatta la scelta di questa funzione e non per esempio la scelta della funzione

$$(2.2') \quad f\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right) = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}.$$

Non può certamente bastare, come giustificazione, il fatto che la (2.2) è nota allo studente dalla scuola secondaria! Ritorneremo su questo fra breve.

Nel caso delle *matrici di ordine tre* si pone:

$$(2.3) \quad \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

La (2.3) prende il nome di *regola di Sarrus* e probabilmente è nota allo studente secondo la seguente regola meccanica: si ricopiano accanto alle tre colonne di A le prime due:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & \ddots & & \ddots & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & & \ddots & & \ddots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

e si scrivono i tre prodotti degli elementi sulle diagonali principali (punteggiate) e si sottraggono i tre prodotti relativi alle diagonali secondarie.

Volendo ora passare al caso di matrici di ordine n qualunque vediamo cosa accomuna le formule introdotte. Nella (2.2) vi sono due addendi con segno, ciascuno dei quali è il prodotto di due elementi (della matrice) i cui indici di riga sono ordinatamente 1 e 2; gli indici di colonna sono nel primo caso la permutazione fondamentale 1 2 nel secondo caso la permutazione dispari 2 1. Nella (2.3) vi sono sei addendi con segno, ciascuno dei quali è il prodotto di tre elementi i cui indici di riga sono la permutazione

fondamentale 1 2 3; gli indici di colonna corrispondono ad una delle sei permutazioni su tre elementi ed il segno è quello della permutazione.

Possiamo ora generalizzare le formule precedenti ponendo:

2.4 Definizione. Si chiama determinante la funzione che associa ad ogni matrice $A = (a_{ij})$ di $M_n(\mathbb{R})$ il numero

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

dove σ varia su tutte le permutazioni di n elementi. ♣

L'espressione di 2.4 contiene $n!$ addendi con segno, ciascuno dei quali è il prodotto di n elementi della matrice due dei quali non si trovano mai nè sulla stessa riga nè sulla stessa colonna (visto che sia gli indici di riga che quelli di colonna sono distinti). Gli stessi addendi possono essere riordinati in modo da ottenere ulteriori regole di calcolo.

2.5 Definizione. Data la matrice $A = (a_{ij})$ si chiama complemento algebrico o cofattore dell'elemento a_{ij} , e si indica con A_{ij} , il numero definito da:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

dove si intende che la riga i^{ma} e la colonna j^{ma} di A vengano omesse. ♣

Per esempio il complemento algebrico di a_{32} nella seguente matrice A è:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{è} \quad A_{32} = (-1)^{2+3} \det \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

2.6 Teorema (SVILUPPO DI LAPLACE PER RIGHE O PER COLONNE). Data una matrice A di ordine n , comunque si fissi una sua riga o una sua colonna, la somma dei prodotti degli elementi della riga o della colonna per i rispettivi complementi algebrici è il $\det(A)$. In formule:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (\text{sviluppo per la riga } i^{\text{ma}}) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (\text{sviluppo per la colonna } j^{\text{ma}}). \end{aligned}$$

Dim. Dimostriamo la formula nel caso della prima riga. Ricordiamo che le $n!$ permutazioni di S_n possono suddividersi in n gruppi, ciascuno dei quali è formato da $(n-1)!$ permutazioni aventi lo stesso elemento iniziale (cfr. 1.2). Basta quindi raccogliere in 2.4 gli addendi per cui $\sigma(1)=1$ e mettere in evidenza a_{11} , gli addendi per cui $\sigma(1)=2$ e mettere in evidenza a_{12} , ..., gli addendi per cui $\sigma(1)=n$ e mettere in evidenza a_{1n} . Si ottiene:

$$\det(A) = a_{11} \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} - a_{12} \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{1\sigma'(1)} a_{3\sigma'(3)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \\ + \cdots \pm a_{1n} \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{n\sigma'(n-1)},$$

dove σ' nella prima somma varia nelle permutazioni dell'insieme $\{2, 3, \dots, n\}$, ..., nell'ultima somma varia nelle permutazioni dell'insieme $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Basta tener conto di 1.4 per riconoscere i cofattori.

Un analogo ragionamento, che omettiamo per brevità, prova la formula nel caso di una qualunque riga o colonna. ♣

Lo sviluppo di Laplace per calcolare un determinante è molto utile! Innanzi esso permette di calcolare un determinante di ordine n tramite determinanti di ordine $n-1$, ed il procedimento può essere reiterato fino ad arrivare a determinanti di ordine 2 (d'altra parte ciò corrisponde al modo con cui abbiamo generato le permutazioni). Certamente il numero di passaggi da effettuare può essere molto grande! Il calcolo si semplifica se, scegliendo opportunamente una riga o una colonna, molti degli elementi sono nulli.

2.7 ESEMPIO. Calcolare il determinante della matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & \sqrt{2} \\ 3 & 0 & \log 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Convien scegliere la seconda colonna; si ha:

$$\det(A) = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & \log 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \log 5 & 1 \end{vmatrix} + 2 \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \log 5 \end{vmatrix} \\ = 4(1 - 3 \log 5) + 2(\log 5 - 3) = -2 - 10 \log 5. \quad \heartsuit$$

Vogliamo infine introdurre la nozione di "matrice trasposta."

2.8 Definizione. Sia A una matrice di tipo $m \times n$; si chiama matrice trasposta della matrice A , e si indica con A^T , la matrice di tipo $n \times m$ ottenuta da A scambiando i vettori riga con i vettori colonna. ♣

Esplicitamente se indichiamo con $a_1, \dots, a_m$ i vettori riga di A (matrici di tipo $1 \times n$) i vettori colonna di A^T sono $a_1^T, \dots, a_m^T$.

Per esempio si ha:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad A^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

In particolare se risulta $A = A^T$ la matrice si dice simmetrica (reale); in questo caso essa è necessariamente quadrata e risulta $a_{hk} = a_{kh}$.

Proprietà importanti della trasposizione sono le seguenti:

2.9 PROPRIETÀ.

- (a) $\det(A) = \det(A^T)$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$;
- (b) $(A^T)^T = A$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$;
- (c) $rg(A) = rg(A^T)$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$;
- (d) $(AB)^T = B^T A^T$, $\forall A \in M_{mk}(\mathbb{R}) \quad B \in M_{kn}(\mathbb{R})$.

Dim. (a) è conseguenza del fatto che lo sviluppo di Laplace del determinante si può indifferentemente effettuare su una riga o su una colonna; (b) è immediata. Per (c) ricordiamo che il rango di una matrice A (cfr. 4.3 e 4.4 del capitolo 2) è il numero massimo dei suoi vettori riga o dei suoi vettori colonna che risultano linearmente indipendenti.

* Per (d) osserviamo che se x è un vettore riga di $\mathbb{R}^n$ ed y un suo vettore colonna, con un calcolo immediato si ha che $xy = y^T x^T$. Sia $C = (c_{ij}) = (AB)^T$; l'elemento c_{ij} è uguale all'elemento di posto j, i nel prodotto AB , cioè $c_{ij} = a_j b^i$. Sia ora $D = (d_{ij}) = B^T A^T$. L'elemento d_{ij} è il prodotto dell' i^{mo} vettore riga di B^T , cioè $(b^i)^T$, per il j^{mo} vettore colonna di A^T , cioè $(a_j)^T$; ne segue che $d_{ij} = (b^i)^T (a_j)^T = a_j b^i = c_{ij}$ e questo prova che $D = C$. *

2.E Esercizi

1. Calcolare, con il metodo di Laplace i determinanti delle seguenti matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Si consideri la matrice A_t dipendente dal parametro reale t :

$$A_t = \begin{vmatrix} 1 & t & t-1 \\ 0 & 1 & 2t \\ 1 & 1-t & -1 \end{vmatrix}.$$

Determinare, se esistono, valori di t per cui il determinante è nullo.

3. Scrivere tutte le 24 permutazioni sugli elementi 1,2,3,4 e calcolarne il segno.

4. Facendo uso dell'esercizio 3 scrivere esplicitamente la formula (2.4) per la generica matrice di ordine 4.

5. Provare che per una matrice di permutazione P (cfr. capitolo 1, definizione 7.5) si ha $\det(P) = \pm 1$.

6. Provare che il determinante di una matrice triangolare inferiore unipotente (cfr. capitolo 1, sezione 5) vale 1.

3. PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

La funzione determinante, che abbiamo considerato nella sezione precedente, gode di alcune proprietà fondamentali che ne giustificano l'introduzione:

3.1 Proprietà. La funzione $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è:

I lineare nel primo vettore riga, cioè:

$$\det \begin{vmatrix} \lambda a_1 + \mu a'_1 & & \\ & a_2 & \\ & \vdots & \\ & a_n & \end{vmatrix} = \lambda \det \begin{vmatrix} a_1 & & \\ a_2 & & \\ \vdots & & \\ a_n & & \end{vmatrix} + \mu \det \begin{vmatrix} a'_1 & & \\ a_2 & & \\ \vdots & & \\ a_n & & \end{vmatrix},$$

II alterna nei vettori riga, cioè scambiando fra loro due righe della matrice il valore del determinante cambia di segno,

III $\det(I) = 1$, $I = I_n$ la matrice identica.

Dim. La matrice a primo membro di I ha sulla prima riga gli elementi $\lambda a_{1j} + \mu a'_{1j}$ e sulle altre righe gli elementi a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). La formula (2.4), esplicitata per questa matrice, è:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\lambda a_{1\sigma(1)} + \mu a'_{1\sigma(1)} \right) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \mu \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato la linearità nel primo vettore riga.

Sia $A = (a_{ij})$ e sia $B = (b_{ij})$ tale che $a_{kj} = b_{hj}$, $a_{hj} = b_{kj}$ e $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni altro valore di i diverso da h e k (la matrice B è ottenuta dalla A scambiando fra loro le righe h e k). Poiché $h \neq k$ possiamo supporre che $h < k$. La formula (2.4) applicata alla matrice B dà luogo a:

$$\begin{aligned} (3.2) \quad & \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{h\sigma(h)} \cdots b_{k\sigma(k)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(h)} \cdots a_{h\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Sia τ la *trasposizione* che scambia h con k e consideriamo la permutazione $\sigma' = \sigma \cdot \tau$, essa è esplicitamente definita da $\sigma'(h) = \sigma(k)$, $\sigma'(k) = \sigma(h)$ e $\sigma'(i) = \sigma(i) \quad \forall i \neq h, k$; al variare di σ fra tutte le permutazioni di n elementi la σ' varia ancora fra tutte le permutazioni di n elementi; d'altra parte $\operatorname{sgn}(\sigma') = -\operatorname{sgn}(\sigma)$.

La (3.2) può ora essere riscritta:

$$- \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{h\sigma'(h)} \cdots a_{k\sigma'(k)} \cdots a_{n\sigma'(n)}.$$

Abbiamo quindi provato che l'espressione (2.4) è alterna.

La III è banale perché l'unico addendo non nullo della (2.4), quando la si applichi alla matrice identica I , è quello costituito dal prodotto degli elementi sulla diagonale; esso corrisponde alla permutazione identica che ha segno $+1$. ♣

Osserviamo che una funzione $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ può essere pensata come funzione $f(A) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$; sull'insieme ordinato dei vettori riga di A . In particolare questo vale anche per la funzione $f = \det$ definita in 2.4. Le proprietà I, II, III di 3.1 di possono riscrivere nel modo seguente:

$$\text{I} \quad f(\lambda a_1 + \mu a'_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \mu f(a'_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$\text{II} \quad f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n),$$

$$\text{III} \quad f(I) = f(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Per inciso si osservi che per la funzione data in 2.1' non vale la I, infatti:

$$f\left(\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right) = \lambda^2 a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \neq \lambda f\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right).$$

L'importanza della funzione determinante è messa in evidenza dal seguente:

3.3 Teorema. *Esiste un'unica funzione $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ godente delle proprietà I, II, III.*

La dimostrazione di ciò segue immediatamente dalle proprietà che passiamo ad enunciare e a provare senza far mai uso della definizione esplicita di determinante, cioè della formula 2.4.

3.4 Proprietà. *Sia $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ una qualunque funzione godente delle proprietà I, II, III. Allora:*

- $\alpha)$ *f è lineare in ciascuno dei vettori riga.*
- $\beta)$ *Per ogni matrice A che abbia due vettori riga uguali risulta $f(A) = 0$;*
- $\gamma)$ *Per ogni matrice A , se alla riga a_i si somma un multiplo di una qualunque altra riga a_j si ottiene una matrice B tale che $f(A) = f(B)$;*
- $\delta)$ *Per ogni matrice diagonale A risulta :*

$$f(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn};$$

- $\nu)$ *Sia A una matrice ed S una sua forma a scala (ottenuta tramite una E.G.), allora risulta $f(A) = \pm f(S)$ valendo il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che nell'E.G. si sia effettuato un numero pari o dispari di scambi di righe. In particolare se A è non singolare si ha:*

$$f(A) = \pm p_1 p_2 \cdots p_n$$

dove $p_1, \dots, p_n$ sono i pivots dell'eliminazione.

$$\text{Dim. } \alpha) f(a_1, \dots, \lambda a_i + \mu a'_i, \dots, a_n) \stackrel{\text{II}}{=} -f(\lambda a_i + \mu a'_i, \dots, a_1, \dots, a_n)$$

$$\stackrel{\text{I}}{=} -\lambda f(a_i, \dots, a_1, \dots, a_n) - \mu f(a'_i, \dots, a_1, \dots, a_n)$$

$$\stackrel{\text{II}}{=} \lambda f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \mu f(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n).$$

Per $\beta)$ osserviamo che scambiando fra loro le due righe uguali la matrice non cambia ma la funzione cambia di segno per la II, si ha quindi $f(A) = -f(A) = 0$.

In γ) poiché $i \neq j$ possiamo assumere, senza perdita di generalità, che $i > j$. Risulta

$$\begin{aligned} f(B) &= f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_n) \\ &\stackrel{\alpha)}{=} f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) + \lambda f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) \stackrel{\beta)}{=} f(A). \end{aligned}$$

In particolare se un vettore riga di A è nullo risulta $f(A) = 0$.

In δ) la matrice A è diagonale quindi l' i^{mo} vettore riga è $a_{ii}e_i$, pertanto risulta:

$$\begin{aligned} f(A) &= f(a_{11}e_1, a_{22}e_2, \dots, a_{nn}e_n) \stackrel{\alpha)}{=} a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} f(e_1, e_2, \dots, e_n) \\ &\stackrel{\text{III}}{=} a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

Ricordiamo infine che ν) segue dal procedimento di eliminazione, visto che f è alterna (cfr. II) ed abbiamo provato γ). Se A è non singolare possiamo effettuare su S l'E.G.↑ ottenendo una matrice diagonale con elementi non nulli, i pivots, e da δ) segue la tesi. ♣

Dim. 3.3 Sappiamo già che esiste almeno una funzione verificante le ipotesi del teorema, basta assumere (cfr. 3.1) $f = \det$. Siano $f_1, f_2 : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni godenti delle proprietà I, II, III; esse sono diverse se esiste almeno una matrice $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $f_1(A_0) \neq f_2(A_0)$. Sia ora A una matrice qualunque di ordine n . Se A è singolare una sua riduzione a scala porta ad un vettore riga nullo; pertanto $f_1(A) = f_2(A) = 0$ (cfr. γ)); se A è non singolare, indicati con $p_1, \dots, p_n$ i pivots di una sua riduzione a scala, risulta $f_1(A) = \pm p_1 \cdots p_n = f_2(A)$ dove il segno dipende dall'E.G. (cfr. ν). Pertanto le due funzioni assumono lo stesso valore su qualunque matrice, cioè coincidono e questo prova l'unicità. ♣

In definitiva abbiamo provato che:

Il determinante è l'unica funzione, definita sulle n -ple di vettori di $\mathbb{R}^n$ ed a valori in $\mathbb{R}$, che risulti multilineare (lineare in ciascun vettore), alterna e che valga 1 sulla n -pla dei vettori canonici.

Facciamo uso di ciò per esempio per provare la seguente:

3.5 Proprietà. Siano A e B due matrici di ordine n , allora risulta:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Dim. Se A o B è singolare, allora il prodotto AB è singolare (cfr. 2,

esercizio IV di ricapitolazione, capitolo 2). Per la proprietà δ) o la μ) della sezione 3 il determinante di una matrice singolare è nullo e la formula è provata.

Sia ora B non singolare e consideriamo la funzione f definita da $f(A) = \det(AB)/\det(B)$. Se proviamo per essa le proprietà I, II, III caratteristiche del determinante, dall'unicità di quest'ultimo ne segue che $f(A) = \det(A)$ e la formula è provata.

Se il primo vettore riga della matrice A è della forma $\lambda a'_1 + \mu a''_1$ il primo vettore riga della matrice AB è della forma $(\lambda a'_1 + \mu a''_1)B = \lambda a'_1 B + \mu a''_1 B$; poiché $\det$ è lineare nel primo vettore riga abbiamo che $\det(AB) = \lambda \det(A'B) + \mu \det(A''B)$, dove A' ed A'' sono le matrici che hanno come primo vettore riga rispettivamente a'_1 e a''_1 e le altre righe coincidenti con quelle di A . Si ha quindi $f(A) = \det(AB)/\det(B) = \lambda \det(A'B)/\det(B) + \mu \det(A''B)/\det(B) = \lambda f(A') + \mu f(A'')$ e la I è provata.

Per provare II basta osservare che se nella matrice A scambiamo due righe, nella matrice prodotto AB si scambiano le stesse righe; poiché il determinante è alterno, nell'espressione di $f(A)$ il numeratore cambia di segno ed il denominatore rimane inalterato, da cui la tesi. Si ha inoltre $f(I) = \det(IB)/\det(B) = 1$. ♣

3.6 OSSERVAZIONE. Il calcolo del determinante con la formula 2.4 (e in generale con lo sviluppo di Laplace 2.6), per n grande, è manualmente impraticabile e richiede ad un calcolatore un numero elevato di operazioni; le difficoltà derivano dal fatto che $n!$ è un numero che cresce in maniera estremamente rapida al crescere di n (per esempio se $n = 11$, $n! = 39.916.800$). Un metodo efficiente di calcolo è invece fornito dall'E.G. (cfr. proprietà ν) e 3.9 del capitolo 1). ♡

3.7* OSSERVAZIONE SUI PIVOTS DI UNA MATRICE. Nell'osservazione 3.11 del capitolo 1 abbiamo insistito sul fatto che i pivots di una matrice non sono univocamente determinati ma dipendono dall'arbitrarietà delle scelte fatte durante il procedimento di eliminazione di Gauss.

Vogliamo ora mettere in evidenza un "invariante" dell'eliminazione, cioè una quantità numerica che non dipende dalle scelte effettuate. Poiché abbiamo provato l'esistenza della funzione determinante, la μ) della sezione 1 ci dice che:

$$\det(A) = \pm p_1 p_2 \dots p_n,$$

e poiché il numero $\det(A)$ dipende solo da A deve necessariamente aversi che il *prodotto dei pivots*, comunque calcolati, è in valore assoluto costante. (cfr. esercizio 6 di 3.E, capitolo 1).

3.E Esercizi

1. Sia A una matrice non singolare. Calcolare il determinante della sua matrice inversa A^{-1} .
2. Si considerino le matrici quadrate A e $C^{-1}AC$, provare che hanno lo stesso determinante.
3. Per ogni matrice quadrata A di ordine n e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ provare che $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

4. APPLICAZIONI: CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA, TEOREMA DI CRAMER

A) CARATTERIZZAZIONI DELLE MATRICI NON SINGOLARI.

Nel capitolo 1, teorema 6.11, abbiamo provato che una matrice A di ordine n è non singolare se e solo se è invertibile. D'altra parte A è non singolare, per definizione, se e solo se i suoi n pivots sono tutti non nulli (si usa qui l'E.G.↓ che porta la matrice in forma triangolare). La formula del determinante tramite i pivots ci dice che i pivots sono tutti non nulli se e solo se $\det(A) \neq 0$.

In definitiva abbiamo per le matrici non singolari le seguenti caratterizzazioni:

$$A \text{ non singolare} \iff \operatorname{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A \text{ è invertibile}.$$

B) IL CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA DI UNA MATRICE NON SINGOLARE.

Dimostriamo innanzi tutto il seguente:

4.1 Lemma Sia A una matrice quadrata di ordine n . La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i complementi algebrici rispettivi di un'altra riga (o colonna) è nulla. In formule, per $h \neq k$, si ha:

$$a_{k1}A_{h1} + a_{k2}A_{h2} + \cdots + a_{kn}A_{hn} = 0,$$

$$a_{1k}A_{1h} + a_{2k}A_{2h} + \cdots + a_{nk}A_{nh} = 0$$

Dim. Le formule indicate corrispondono allo sviluppo secondo la riga (o colonna) k del determinante della matrice B ottenuta dalla A sostituendo la riga h con la riga k (ovvero la colonna h con la colonna k); in questo modo B ha due righe (o due colonne) uguali. (Si tenga presente che i

complementi algebrici $\mathcal{A}_{hi}$, $i=1, \dots, n$ non contengono elementi della riga h , così come gli $\mathcal{A}_{ih}$ non contengono elementi della colonna h , ed è per questo che abbiamo potuto sostituirla!). ♣

4.2 Definizione. Si chiama matrice aggiunta di A , e si indica con $\text{Agg}(A)$, la matrice che ha come elemento nel posto i, j il complemento algebrico $\mathcal{A}_{ji}$ della matrice A . ♣

Per esempio calcoliamo la matrice aggiunta della matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Scriviamo esplicitamente tutti i cofattori: $\mathcal{A}_{11} = 2$, $\mathcal{A}_{12} = 0$, $\mathcal{A}_{13} = -1$, $\mathcal{A}_{21} = 25/6$, $\mathcal{A}_{22} = 3/2$, $\mathcal{A}_{23} = -7/3$, $\mathcal{A}_{31} = -1/2$, $\mathcal{A}_{32} = 0$, $\mathcal{A}_{33} = 1$. Ricordando che la definizione di matrice aggiunta prevede uno scambio degli indici di riga e di colonna otteniamo:

$$\text{Agg}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 25/6 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -1 & -7/3 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.3 Proposizione. Se A è una matrice non singolare per la sua inversa A^{-1} vale la formula:

$$A^{-1} = \frac{\text{Agg}(A)}{\det(A)}.$$

Dim. Si tratta di provare che:

$$A \cdot (1/\det(A)) \cdot \text{Agg}(A) = (1/\det(A)) A \cdot \text{Agg}(A) = I.$$

L'elemento di posto i, j nel prodotto $A \cdot \text{Agg}(A)$ è dato da:

$$a_{i1}\mathcal{A}_{j1} + a_{i2}\mathcal{A}_{j2} + \dots + a_{in}\mathcal{A}_{jn} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \det(A) & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Dividendo per lo scalare $\det(A)$ si ottiene la matrice identica. ♣

Calcoliamo ora la matrice inversa della matrice data nell'esempio precedente. Sviluppando secondo gli elementi della seconda riga si ottiene $\det(A) = 3/2$; la matrice A^{-1} si ottiene ora dall'aggiunta dividendo per il $\det(A)$:

$$A^{-1} = 2/3 \begin{vmatrix} 2 & 25/6 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -1 & -7/3 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.4 AVVERTENZA. Nel calcolo della matrice inversa è facile commettere errori, particolarmente se si fa uso del metodo che abbiamo adesso esposto



che è più complesso (dal punto di vista del calcolo) di quello ottenuto tramite l'eliminazione di Gauss (cfr. 6.14 del capitolo 1). Lo studente si ricordi però che è sempre possibile ed utile effettuare la verifica $AA^{-1} = I$. Se sbaglia anche questo calcolo ..., ebbene ... al destino non si sfugge!

C) IL TEOREMA DI CRAMER PER LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI QUADRATI CON MATRICE NON SINGOLARE.

4.5 Teorema Sia $Ax = b$ un sistema quadrato con matrice non singolare; la sua unica soluzione ξ è data da:

$$\xi_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)},$$

dove B_i è la matrice ottenuta da A sostituendo l' i^{mo} vettore colonna a^i con b .

Dim. Ricordiamo che la soluzione di $Ax = b$ può scriversi nella forma $\xi = A^{-1}b = (1/\det(A)) \text{Agg}(A)b$ (cfr. la proposizione 6.12 del capitolo 1 e la 4.3).

Calcoliamo il determinante di B_i con lo sviluppo di Laplace secondo gli elementi della colonna i^{ma} : $\det(B_i) = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \dots + b_nA_{ni}$. Esso coincide con la componente i^{ma} del prodotto $\text{Agg}(A)b$; dividendo per $\det(A)$ otteniamo che il numero ξ_i è la componente i^{ma} di $(1/\det(A)) \text{Agg}(A)b$, da cui la tesi. ♣

4.6 ESEMPIO. Determinare la soluzione del sistema $Ax = b$:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - z &= 1, \\ 2x - z &= 0 \end{aligned} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Poiché per la matrice dei coefficienti si ha $\det(A) = -2$ il sistema ammette un'unica soluzione che, per il teorema di Cramer è data da:

$$\xi = -(1/2)\det \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \mu = -(1/2)\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \nu = -(1/2)\det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

ovvero: $\xi = 1/2$, $\mu = 3/2$, $\nu = 1$.

E Esercizi

1. Calcolare il determinante ed i complementi algebrici della matrice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Determinare, se esistono, valori del parametro reale t per i quali la matrice A_t è singolare:

$$A_t = \begin{vmatrix} 1 & t-3 & -2 \\ 0 & t-1 & t^2-1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Determinare, se esistono, valori del parametro reale k per i quali la matrice A_k è invertibile:

$$A_k = \begin{vmatrix} k & k & 0 & -k \\ 1 & 0 & k^2-k & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ k^3 & k & 0 & -k \end{vmatrix}.$$

4. Determinare, se esiste, la matrice inversa della matrice A facendo uso della matrice $\text{Agg}(A)$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Dato il sistema lineare:

$$x + y + 3z - 1 = 0$$

$$x - y + z + 1 = 0$$

$$-y + z - 2 = 0$$

- vedere se è compatibile ed in caso affermativo esprimere la soluzione facendo uso del teorema di Cramer.

6. Sia A una matrice ad elementi interi e tale che $\det(A) = \pm 1$. Provare che A^{-1} è ancora ad elementi interi.

7. Si consideri il sistema:

$$ax + by + cz = 0$$

$$a'x + b'y + c'z = 0$$

nelle incognite x, y, z e si assuma che la matrice dei coefficienti abbia rango

massimo. Provare che le soluzioni sono tutte fra loro proporzionali e che si ha:

$$x : y : z = \det \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} : -\det \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} : \det \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

(Suggerimento: si assuma, per esempio, che z sia una variabile libera e si risolva il sistema nelle incognite x, y facendo uso del teorema di Cramer).

5*. CENNI STORICI SULLO SVILUPPO DELL'ALGEBRA LINEARE

L'algebra lineare è una sistemazione moderna di idee e tecniche molto antiche. Regole di calcolo di tipo lineare erano note ai Greci ed ai Babilonesi che sapevano risolvere alcuni sistemi lineari.

Nell'epoca moderna i progressi maggiori furono, fino al secolo scorso, più che altro legati al miglioramento delle notazioni matematiche. Un impatto notevole ha avuto l'introduzione dei determinanti e le formule risolutive esplicite dei sistemi di n equazioni in n incognite (con matrice non singolare), dovute apparentemente a G.W. Leibnitz (1646-1716) che però non ha pubblicato i risultati. È interessante notare che per lungo tempo un problema in cui il numero delle equazioni fosse diverso da quello delle incognite era considerato mal posto!

Un impatto notevole sullo sviluppo dell'algebra lineare, nel senso moderno del termine, ha avuto lo studio della geometria analitica, iniziata da P. Fermat (1601-1665) e da R. Descartes (1596-1650) ed in particolare l'idea di classificare, a seconda del grado, le curve piane che si rappresentano con un'equazione $p(x, y) = 0$, dove $p(x, y)$ è un polinomio in due variabili. È proprio dalla ricerca di una curva piana del tipo indicato (e di grado fissato) passante per alcuni punti assegnati che nasce, con G. Cramer (1704-1752) e E. Bézout (1730-1783), la nozione di determinante le cui proprietà essenziali sono poi state messe in evidenza da A.L. Cauchy (1789-1857) e C.G.J. Jacobi (1805-1851). L'introduzione delle matrici è dovuta a J.J. Sylvester (1814-1897) il quale ha implicitamente introdotto anche la nozione di rango, (tale nome è dovuto però a G.F. Frobenius (1849-1917)). La definizione assiomatica di determinante, cui abbiamo accennato in questo capitolo, è dovuta a L. Kronecker (1823-1891) ed a C. Weierstrass (1815-1897). Si tratta di un campo di ricerche degli ultimi trenta anni del secolo scorso.

L. Eulero (1707-1783), G.L. Lagrange (1736-1813) e F. Gauss (1777-1855) in vari modi si sono occupati di problemi tipicamente lineari. In particolare Gauss trattò sistemi lineari sia per calcoli di astronomia che in tutt'altra disciplina: la teoria dei numeri. Il metodo di eliminazione di

Gauss che abbiamo esposto nei capitoli precedenti è in realtà una variante più recente dei metodi usati da Gauss.

La nozione di spazio vettoriale numerico e la sua interpretazione geometrica si è andata formando lentamente nel secolo scorso, inizialmente per le dimensioni $n = 2, 3$ e poi per n qualunque, a partire dallo studio delle equazioni differenziali lineari (Eulero-Lagrange) e seguendo le idee sintetiche della geometria proiettiva, sviluppata da A.F. Möbius (1790-1868) e da M. Chasles (1793-1880), e da quelle analitiche sul calcolo delle matrici dovuto a A. Cayley (1821-1895) e W.R. Hamilton (1806-1865). La nozione moderna di spazio vettoriale, in forma praticamente assiomatica (cfr. capitolo 2, sezione 3), è dovuta a H. Grassmann (1809-1877) che tra l'altro introduce la nozione di indipendenza lineare e prova la formula sulla dimensione dell'intersezione di sottospazi (cfr. capitolo 2, sezione 6). Una trattazione completa dei sistemi lineari qualunque è dovuta a Kronecker.

Il contributo più importante di Grassmann nel settore è lo sviluppo del "calcolo esterno" di cui non parleremo in questo volume ma che è alla base della geometria differenziale. Altrettanto importante è il "calcolo tensoriale" dovuto a Kronecker e che è stato introdotto in geometria differenziale da G. Ricci (1853-1925) e da T. Levi Civita (1873-1941).

Una grande influenza sullo sviluppo dell'algebra lineare e della teoria delle matrici ha avuto la "teoria degli invarianti" sviluppata da Cayley, C. Hermite (1822-1901), Sylvester, R.F. Clebsch (1833-1872), P. Gordan (1837-1912) e di cui diamo alcuni esempi nei prossimi capitoli.

La teoria degli "autovalori", che lo studente vedrà nel capitolo 7, nasce con Lagrange dallo studio di un sistema di equazioni differenziali rappresentante il moto di un sistema ad n parametri e successivamente dal moto dei pianeti. Per le trasformazioni lineari la teoria si sviluppa inizialmente con Cauchy che la applica alle matrici; in particolare egli dimostra che gli autovalori di una matrice simmetrica reale sono reali.

6. ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

ESERCIZIO I

1. Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice di permutazione. Provare che $P^T = P^{-1}$.

2. Si interpretino le equazioni:

$$x_1 = 2t + t', \quad x_2 = t + t', \quad x_3 = -t + 2t', \quad x_4 = (1/2)t'$$

come equazioni parametriche di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$. Determinare la dimensione ed equazioni cartesiane per W .

3. Calcolare il determinante della seguente matrice A e determinarne il rango:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

ESERCIZIO II

1. Nello spazio $\mathcal{V}_O$ è fissata una base i, j, k e sono date due sottovarietà U' e W' che hanno equazioni parametriche rispettivamente:

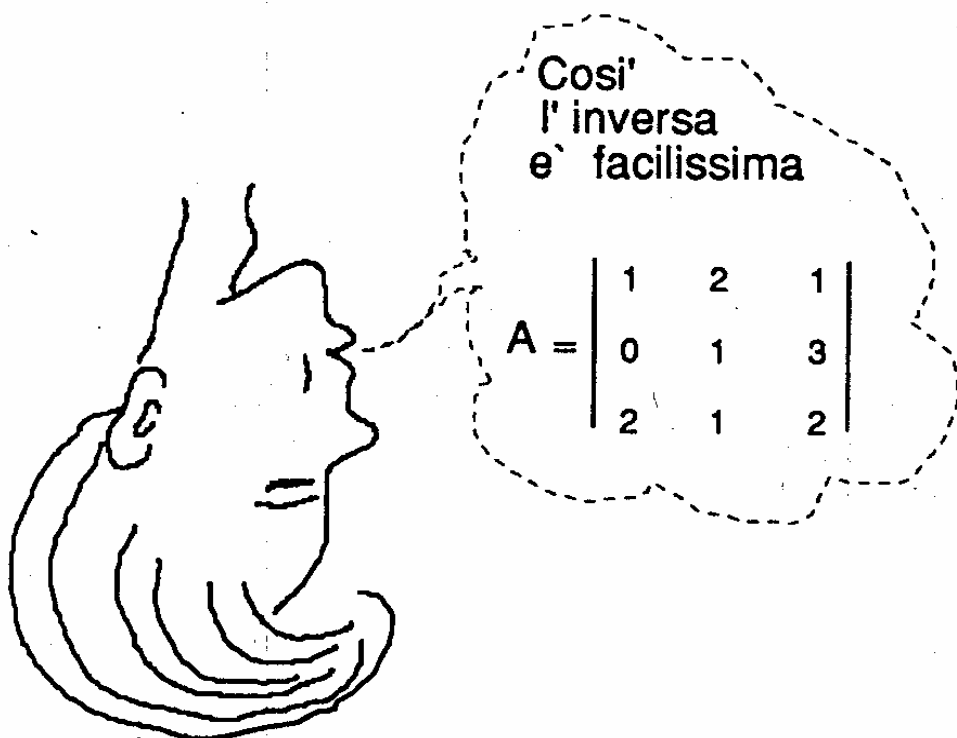
$$x = 2t + 1, y = -t + 2, z = t + 1; \quad x = -6t' + 2, y = 3t' + 3/2, z = -3t' + 3/2.$$

Provare che le due sottovarietà coincidono.

2. Sia $\mathbf{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3 e sia $W \subset \mathbf{R}_3[x]$ il sottoinsieme dei polinomi $p(x)$ tali che $p(1) = 0$, $p'(1) = 0$ (dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$). Provare che W è un sottospazio e calcolarne la dimensione.

3. (Teorema di Rouché - Capelli) Sia $Ax = b$ un sistema lineare di matrice A di tipo $m \times n$ e sia A' la matrice ottenuta da A aggiungendo come ultimo vettore colonna il vettore b . Provare che il sistema $Ax = b$ è compatibile se e solo se $rg(A) = rg(A')$.

(Suggerimento: si consiglia di far uso dell'eliminazione di Gauss).



$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Capitolo 4

GEOMETRIA AFFINE

INTRODUZIONE In questo capitolo assumiamo inizialmente che lo studente conosca dagli studi secondari la geometria euclidea, così come abbiamo fatto nel capitolo 2. Tramite l'introduzione di coordinate cartesiane vengono quindi riformulate nel linguaggio dell'algebra lineare le "proprietà affini" dello spazio, cioè quelle relative alle nozioni di incidenza e di parallelismo fra rette e piani. Lo studio del piano discende da quello dello spazio come caso particolare. Le proprietà geometriche in esame sono tutte esprimibili tramite condizioni lineari e la nozione di rango viene letta geometricamente come "gradi di libertà" di un sistema. Nell'ultima sezione, infine, discutiamo brevemente i fondamenti della geometria euclidea in quanto spesso lo studente ha solo un'immagine intuitiva della geometria (del piano); non ha idea di quali siano i suoi fondamenti logici e, anche se ha sentito parlare di assiomi, non ne ha capito l'importanza.

1. RIFERIMENTI CARTESIANI SULLA RETTA, NEL PIANO E NELLO SPAZIO

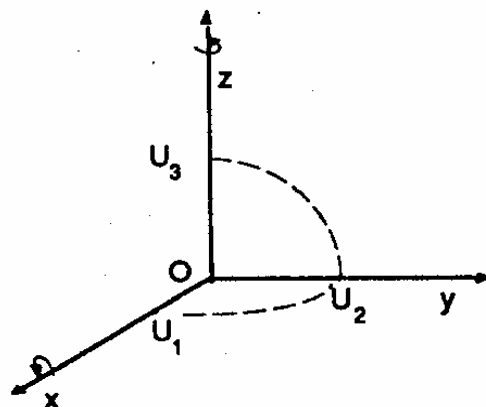
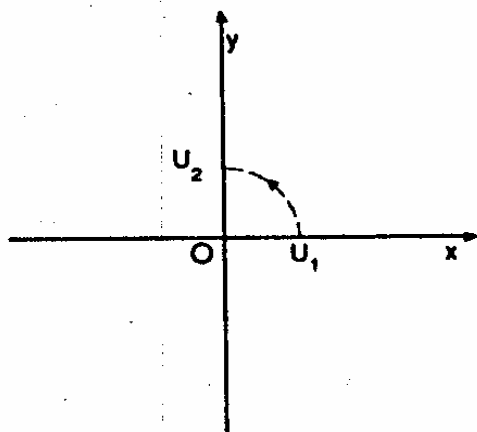
Ricordiamo brevemente come si introduce la nozione di *ascissa* su una retta r . Si fissano arbitrariamente un *punto origine* O ed un *punto unità* U su di essa; questa scelta determina una "orientazione" sulla retta, cioè un ordinamento dei suoi punti, secondo cui il punto U segue il punto O . Inoltre è possibile associare ad ogni punto P di r un numero reale x definito come segue: il valore assoluto $|x|$ è la misura del segmento OP rispetto all'unità di misura costituita dal segmento OU , il segno di x è positivo o negativo a seconda che P segua o preceda O nell'orientazione fissata.



Il numero reale x prende il nome di *ascissa* del punto P nel riferimento cartesiano (affine) $RA(O, U)$ determinato dai punti fondamentali O ed U . Il postulato della continuità permette di affermare che:

1.1 Proposizione. *La corrispondenza $r \rightarrow \mathbb{R}$ fra i punti della retta ed i numeri reali, che associa ad ogni punto $P \in r$ la sua ascissa nel riferimento $RA(O, U)$, è biunivoca.* ♣

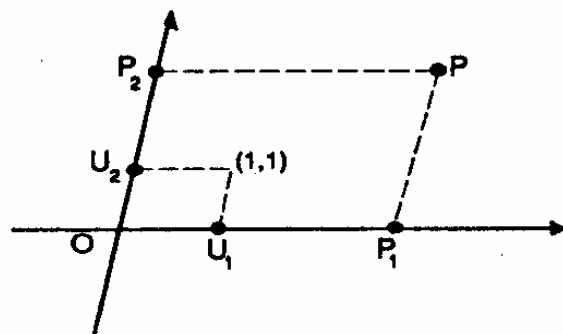
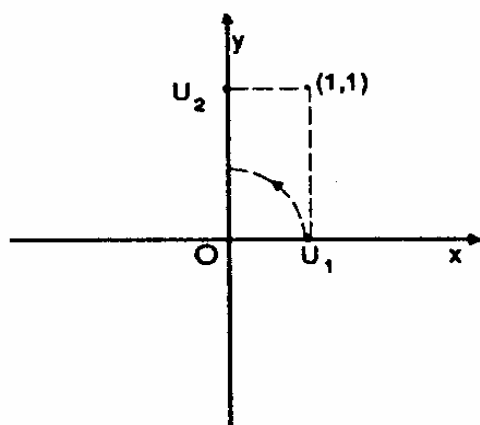
Dalla scuola secondaria dovrebbe essere nota allo studente la nozione di sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) nel piano: si fissano due rette ortogonali (dette asse x ed asse y) incidenti nel punto O e su di esse si prendono i punti U_1, U_2 in modo che i segmenti OU_1 ed OU_2 (unità di misura) siano uguali; su ciascuno degli assi abbiamo quindi un riferimento e la corrispondente ascissa. Dato comunque un punto P si considerino le sue proiezioni su uno degli assi e parallelamente all'altro; il punto P_1 possiede un'ascissa x così come il punto P_2 possiede l'ascissa y ed in definitiva ad ogni punto resta associata la coppia ordinata di numeri reali x, y . La corrispondenza $\mathcal{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fra i punti del piano e le coppie di numeri reali è biunivoca (in virtù della proposizione 1.1).



Nello spazio si ha una situazione del tutto simile: si fissano tre rette mutuamente ortogonali e passanti per un punto O e su di esse rispettivamente i segmenti unità di misura OU_1, OU_2, OU_3 uguali fra loro.

Osserviamo però che non vi è alcuna necessità di misurare i segmenti, sugli assi x ed y , con la stessa unità di misura; spesso è conveniente assumerle diverse (per esempio quando su uno degli assi si debbano riportare numeri molto grandi e sull'altro numeri molto piccoli). D'altra

parte non vi è alcuna necessità di assumere gli assi ortogonali fra loro.



Nel piano e nello spazio ordinario abbiamo tre tipi di nozioni: quelle di *appartenenza* (o *incidenza*) che riguardano l'appartenere o meno un punto ad una retta o ad un piano, l'appartenere o meno una retta ad un piano, l'intersezione di rette, di piani, di rette e piani etc.; quelle di *parallelismo* che riguardano il parallelismo di rette, piani o rette e piani e quelle di *angoli* e di *misura dei segmenti* (da cui deriva che due segmenti, comunque messi nel piano o nello spazio, sono uguali se e solo se hanno la stessa misura). Noi non vogliamo far uso *per ora* delle nozioni angolari e di misura; pertanto studieremo la "geometria affine" del piano e dello spazio ordinario intendendo con questo lo studio di tutte quelle proprietà che sono deducibili dalle proprietà di "appartenenza" e di "parallelismo". In questo caso si parla anche di *piano* o *spazio affine ordinario* (dal punto di vista dell'assiomatica che verrà illustrata nella sezione 6, si vogliono assumere tutti i gruppi di postulati ad eccezione del terzo).

Per i nostri scopi è interessante mettere in evidenza la relazione fra lo spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ e lo spazio vettoriale $\mathcal{R}^3$.

Fissato arbitrariamente un punto O dello spazio euclideo abbiamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$; la corrispondenza $\mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}_O$ che associa al punto P il vettore OP , è biunivoca e fa corrispondere a punti, rette, piani di $\mathcal{E}^3$ rispettivamente sottovarietà affini di dimensione 0, 1, 2 di $\mathcal{V}_O$. Fissata una base $i = OU_1$, $j = OU_2$, $k = OU_3$ di $\mathcal{V}_O$ si ha la corrispondenza biunivoca $\mathcal{V}_O \rightarrow \mathcal{R}^3$ (cfr. 5.13 del capitolo 2). Pertanto si ha la corrispondenza biunivoca (determinata dalla scelta di O e di i, j, k):

$$\mathcal{E}^3 \longrightarrow \mathcal{V}_O \longrightarrow \mathcal{R}^3$$

$$P \longmapsto OP = xi + yj + zk \longmapsto (x, y, z)$$

che fa corrispondere a punti, rette, piani di $\mathcal{E}^3$ rispettivamente sottovarietà affini di dimensione 0, 1, 2 di $\mathcal{R}^3$. In particolare si chiamano *coordinate*

cartesiane del punto P le coordinate x, y, z del vettore OP nella base fissata.

La scelta di un punto O in $\mathcal{E}^3$ e di una base in $\mathcal{V}_O$ determina un *referimento cartesiano* affine di assi x, y, z (le rette generate dai vettori della base) che viene di solito indicato con $RA(O, i, j, k)$ o anche $RA(O, x, y, z)$. Nel caso si vogliano usare tutte le proprietà della geometria euclidea e si fissi in $\mathcal{V}_O$ una base ortonormale (cfr. capitolo 6, sezione 1) si ottengono riferimenti cartesiani ortogonali monometrici (o ortonormali) che vengono indicati con $RC(O, x, y, z)$.

2. CONDIZIONI ANALITICHE DI APPARTENENZA E PARALLELISMO

Fissiamo in $\mathcal{E}^3$ un riferimento affine $RA(O, i, j, k)$ ed il corrispondente sistema di coordinate cartesiane. Nel capitolo 2, sezione 5, abbiamo discusso le equazioni parametriche e cartesiane sia di rette che di piani ed il modo di passare dalle une alle altre. Osserviamo ancora che nelle equazioni parametriche vi è una larga arbitrarietà derivante dalla scelta di generatori per il sottospazio e dalla scelta del vettore traslazione (cfr. 5.2 e 5.10 del capitolo 2). Nell'equazione cartesiana di un piano

$$(2.1) \quad ax + by + cz + d = 0$$

i coefficienti a, b, c, d non sono unici in quanto possono essere moltiplicati simultaneamente per uno stesso fattore non nullo. Anche per una retta le equazioni:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{aligned}$$

non sono uniche. Essa appare infatti come intersezione dei due piani corrispondenti alle due equazioni date; ma la stessa retta può essere rappresentata come intersezione di altri due piani passanti per essa.

2.3 Definizione. Si chiama fascio proprio di piani la totalità dei piani passanti per una retta s assegnata. ♣

2.4 Proposizione. Se la retta s è rappresentata dalle equazioni (2.2), i piani del fascio si possono rappresentare con l'equazione:

$$(2.5) \quad \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

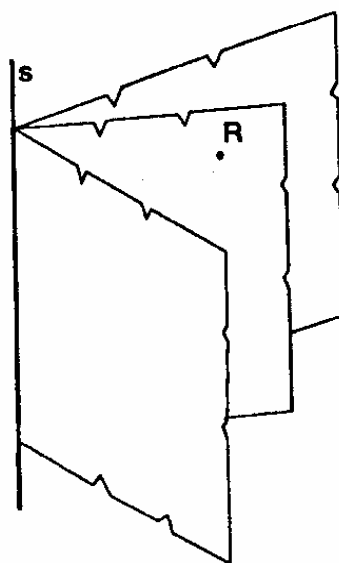
al variare dei parametri reali (omogenei) λ, μ , $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Dim. Infatti tale equazione è lineare in x, y, z ed è soddisfatta dalle soluzioni del sistema che determina s ; rappresenta quindi, al variare dei parametri, piani per s . Si ottengono così *tutti* i piani per s ; infatti se si assegna un punto $R = (x_0, y_0, z_0) \notin s$ esiste un unico piano per R ed s (cfr. proposizione 6.1 alla fine di questo capitolo) e la corrispondente equazione si ottiene assegnando a λ e μ valori che verifichino la relazione:

$$\lambda(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + \mu(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d') = 0;$$

quest'ultima è un'equazione lineare nelle incognite λ e μ , con coefficienti non tutti nulli (perchè $R \notin s$) le cui soluzioni sono tutte fra loro proporzionali. I parametri λ, μ sono detti *omogenei* perchè se si moltiplicano simultaneamente per uno stesso fattore non nullo, i coefficienti di (2.5) si moltiplicano per lo stesso fattore ed il piano non varia. ♣

Il piano generico del fascio di asse s si può anche rappresentare dividendo l'equazione (2.5) per esempio per λ , nell'ipotesi che $\lambda \neq 0$; si ottiene l'equazione:



$$(2.6) \quad ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

ove $k = \mu/\lambda$ è un parametro reale (essenziale) al variare del quale varia il piano del fascio. Si osservi però che in questa rappresentazione il piano (del fascio) di equazione $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ non si ottiene per nessun valore di k , esso quindi *non* è rappresentato nell'equazione (2.6).

2.7 ESERCIZIO. Data la retta s di equazioni $x + y - z + 2 = 0$, $2x - y + 5 = 0$, determinare tutti i piani passanti:

- (a) per s e per il punto $P = (-1, -3, 0)$;
- (b) per s e per il punto $Q = (0, 5, 7)$.

Il piano richiesto in (a) esiste ed è unico in quanto il punto assegnato non appartiene alla retta s (le sue coordinate non verificano la prima equazione di s). Esso può essere ricercato fra i piani del fascio di asse s di equazione $\lambda(x + y - z + 2) + \mu(2x - y + 5) = 0$ imponendo che quest'ultima sia soddisfatta dalle coordinate del punto P . Si ottiene la condizione lineare $\lambda(-1 - 3 + 2) + \mu(-2 + 3 + 5) = 0$, cioè $-2\lambda + 6\mu = 0$

da cui si ricava per esempio $\lambda = 3$, $\mu = 1$. Il piano cercato ha equazione $3(x + y - z + 2) + (2x - y + 5) = 0$, ovvero $5x + 2y - 3z + 11 = 0$.

Nel caso (b) tutti i piani del fascio di asse la retta s verificano la condizione richiesta in quanto $Q \in s$. D'altra parte se si procede in modo analitico, come nel caso (a), si ottiene $\lambda(0 + 5 - 7 + 2) + \mu(0 - 5 + 5) = 0$ cioè $0\lambda + 0\mu = 0$ che ammette come soluzione qualunque coppia di numeri reali. ♥

2.8 ESERCIZIO. *Determinare il piano che passa per la retta s dell'esercizio precedente e per il punto $Q = (-1, 3, 1) \notin s$.*

Rappresentiamo il fascio di asse s con l'equazione (2.6): $x + y - z + 2 + k(2x - y + 5) = 0$. Imponendo il passaggio per Q otteniamo l'equazione $0k + 3 = 0$ la quale non è verificata per alcun valore di k . La conclusione non è certamente che il piano cercato non esiste! Infatti poiché $Q \notin s$ tale piano esiste ed è unico. Dobbiamo tener conto però che l'equazione (2.6) non rappresenta tutti i piani del fascio; nel caso attuale non è rappresentato il piano $2x - y + 5 = 0$. La conclusione è pertanto che il piano cercato è proprio quello omissso nell'equazione (2.6). ♥

2.9 Definizione. *Si chiama fascio improprio di piani, ovvero fascio di piani paralleli, la totalità dei piani paralleli ad un piano dato.* ♣

I piani di un fascio improprio sono tutti rappresentati dall'equazione:

$$(2.10) \quad ax + by + cz + k = 0,$$

al variare del parametro reale k , infatti si ottengono così tutte le sottovarietà affini parallele ad uno stesso sottospazio.

Poiché i piani di un fascio (proprio o improprio) dipendono da un parametro reale k si dice che essi costituiscono un "sistema lineare di ∞^1 piani", (l'aggettivo *lineare* si riferisce al fatto che nell'equazione (2.6) o nella (2.10) il parametro k figura al primo grado!).

2.11 Definizione. *Si chiama stella di piani di centro P_0 la totalità dei piani che passano per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.* ♣

L'equazione dei piani della stella di centro P_0 è data da:

$$(2.12) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

al variare dei parametri omogenei $a, b, c \in \mathbb{R}$ e non tutti nulli. Infatti la (2.12) rappresenta piani passanti per P_0 ; d'altra parte un qualunque piano dello spazio, di equazione $ax + by + cz + d = 0$, passa per P_0 se e solo se $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, ovvero $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Sostituendo tale

valore di d si ottiene la (2.12).

I piani di una stella costituiscono un "sistema lineare di ∞^2 piani", infatti nell'equazione (2.12) si può dividere per uno dei coefficienti a, b, c ; per esempio se si divide per c ($c \neq 0$), si ottiene:

$$(2.13) \quad k(x - x_0) + h(y - y_0) + z - z_0 = 0,$$

ove $k = a/c$, $h = b/c$ ed i parametri essenziali sono di fatto due.

Da questo punto di vista possiamo anche dire che la totalità dei piani dello spazio è un "sistema lineare di ∞^3 piani" in quanto l'equazione di un piano dipende dai quattro coefficienti a, b, c, d non tutti nulli, ma l'equazione può essere divisa per uno di essi (supposto non nullo) ed i coefficienti essenziali sono tre.

L'infinità di un sistema (in questo caso di piani), cioè il numero di parametri essenziali da cui esso dipende, rappresenta i *gradi di libertà* dell'elemento variabile nel sistema medesimo. Per esempio i gradi di libertà di un punto dello spazio sono tre in quanto esso dipende da tre parametri essenziali: le sue coordinate!

Un punto variabile su una retta ha un grado di libertà in quanto le sue coordinate $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ (cfr. (5.11) del capitolo 2) sono funzioni lineari del parametro (essenziale) $t \in \mathbb{R}$; equivalentemente i punti di una retta costituiscono un "sistema lineare ∞^1 ". In modo analogo, facendo riferimento alle equazioni parametriche (5.12) del capitolo 2, si vede che un punto variabile su un piano ha due gradi di libertà in quanto le sue coordinate dipendono da due parametri o, equivalentemente, i punti di un piano costituiscono un "sistema lineare ∞^2 ".

Per determinare un punto su una data retta (o piano) basta assegnare un valore esplicito al parametro (o ai parametri) e sostituire nelle equazioni parametriche.

2.14 ESEMPIO. La retta r di equazioni parametriche $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = -1 - t$ passa per l'origine che si ottiene per $t = -1$. Essa non passa per il punto $P = (3, 2, 0)$ in quanto, se così fosse, dovrebbe aversi simultaneamente $3 = 1 + t$, $2 = 2 + 2t$, $0 = -1 - t$, ma questo sistema non è compatibile. ♥

2.15 ESERCIZIO. Determinare, se esiste, il punto di intersezione della retta r di equazioni parametriche $x = 3t - 1$, $y = t$, $z = t + 1$ con il piano α di equazione $x - 2y + z - 1 = 0$.

Il punto generico P variabile su r ha coordinate $P = (3t-1, t, t+1)$, cioè coordinate che dipendono linearmente dal parametro t . Se un tale punto appartiene ad α deve esistere un valore di tale parametro per cui le sue coordinate soddisfano l'equazione cartesiana di α . Effettuando la sostituzione si ottiene: $3t - 1 - 2t + t + 1 - 1 = 0$, cioè l'equazione (lineare in t) $2t - 1 = 0$ che ammette l'unica soluzione $t = 1/2$. Il punto cercato pertanto esiste, è unico ed ha coordinate $(1/2, 1/2, 3/2)$. È chiaro che, in altri esempi, può accadere che l'equazione lineare in t ammetta infinite o nessuna soluzione; nel qual caso si deve concludere che o r ed α si appartengono o che r ed α sono paralleli. ♥

2.16 Definizione. i) Sia r una retta passante per l'origine O (sottospazio di V_O); un suo vettore non nullo $v = (l, m, n)$ si chiama un vettore direttore per la retta r e per tutte le rette s ad essa parallele. Le coordinate l, m, n di v si chiamano anche parametri direttori.

ii) Sia α un piano passante per l'origine O (sottospazio in V_O); una coppia $v = (l, m, n)$, $v' = (l', m', n')$ di suoi vettori indipendenti si chiama una coppia di vettori di giacitura per il piano α e per tutti i piani β ad esso paralleli.

Si chiamano parametri di giacitura di un piano i coefficienti a, b, c di un'equazione cartesiana del piano. ♣

I parametri direttori di una retta e i parametri di giacitura di un piano sono terne (non nulle) di numeri definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo e sono comuni rispettivamente ad una retta e a tutte le sue parallele, ovvero ad un piano e a tutti i piani ad esso paralleli.

RICERCA DEI PARAMETRI DIRETTORI DI UNA RETTA. Essi si leggono direttamente, nelle equazioni parametriche, dai coefficienti del parametro. Se la retta è nota attraverso equazioni cartesiane $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, un vettore direttore $v = (l, m, n)$ deve appartenere al sottospazio parallelo e quindi deve soddisfare il sistema omogeneo:

$$al + bm + cn = 0$$

$$a'l + b'm + c'n = 0.$$

Poichè la matrice A dei coefficienti ha rango due (cfr. (5.8), capitolo 2), il sistema ammette infinite soluzioni fra loro proporzionali, legate alle sottomatrici della matrice A dalle relazioni, (cfr. 7 di 4.E, capitolo 3):

$$(2.17) \quad l : m : n = \det \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} : -\det \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} : \det \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

In definitiva si possono ricavare *parametri direttori* per la retta calcolando direttamente i determinanti indicati in (2.17) a partire dalla matrice dei coefficienti del sistema di due equazioni che la rappresenta.

RICERCA DEI PARAMETRI DI GIACITURA DI UN PIANO. Essi si leggono direttamente dai coefficienti dell'equazione cartesiana. Se sono invece note equazioni parametriche del piano, è nota una coppia di vettori indipendenti di giacitura $\mathbf{v} = (l, m, n)$, $\mathbf{v}' = (l', m', n')$ che devono appartenere al sottospazio parallelo $ax + by + cz = 0$; ne segue che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ devono verificare il sistema nelle incognite a, b, c :

$$la + mb + nc = 0$$

$$l'a + m'b + n'c = 0$$

le cui soluzioni sono date da:

$$(2.18) \quad a : b : c = \det \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} : -\det \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix} : \det \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}.$$

In definitiva i *parametri di giacitura* si possono ricavare dai determinanti indicati in (2.18) a partire dalla matrice che ha come vettori riga una coppia di vettori di giacitura del piano.

Notiamo che un vettore $\mathbf{v} = (l, m, n)$ è parallelo al piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ se e solo se:

$$al + bm + cn = 0.$$

Possiamo ora riassumere le *condizioni analitiche di parallelismo* nello spazio, facendo intervenire parametri direttori per le rette e coefficienti di giacitura per i piani:

$$l : l' = m : m' = n : n' \quad \text{parallelismo fra rette,}$$

$$a : a' = b : b' = c : c' \quad \text{parallelismo fra piani,}$$

$$al + bm + cn = 0 \quad \text{parallelismo fra retta e piano,}$$

ove (l, m, n) ed (l', m', n') sono parametri direttori delle rette, (a, b, c) ed (a', b', c') sono parametri di giacitura dei piani.

Le condizioni scritte rappresentano non soltanto il parallelismo ma anche il caso in cui le due rette o i due piani coincidano, ovvero che

la retta giaccia sul piano. Per verificare ciò basta controllare che le sottovarietà abbiano un punto in comune.

2.19 ESEMPIO. La retta $x = 2+t$, $y = 1-t$, $z = 4$ ed il piano $x+y+z-3=0$ sono paralleli ma la retta non appartiene al piano. Infatti i parametri direttori della retta sono $(1, -1, 0)$, i coefficienti di giacitura del piano sono $(1, 1, 1)$ ed è verificata la condizione $al + bm + cn = 0$. D'altra parte il punto $P = (2, 1, 4)$, che appartiene alla retta in quanto si ottiene per $t = 0$, non appartiene al piano visto che tali coordinate non soddisfano la sua equazione. ♥

2.E Esercizi

Nello spazio affine ordinario si consideri il riferimento $RA(O, x, y, z)$.

1. Scrivere un'equazione per tutti i piani passanti per la retta r di equazioni $3x - y + z - 3 = 0$, $x + z - 1 = 0$.
2. Scrivere equazioni per la totalità dei piani passanti per $P_0 = (1, 3, 2)$.
3. Determinare un'equazione cartesiana per il piano α passante per il punto $P = (3, 0, 1)$ e per la retta r di equazioni $3x - y + z - 2 = 0$, $x - 3z = 0$.
4. Verificare che l'equazione $\lambda(x + y - z) + \mu(3x + 3y - 3z + 5) = 0$, al variare dei parametri reali λ, μ , rappresenta l'equazione di un fascio improprio di piani. Determinare fra essi quello che passa per il punto $Q = (1, 3, 0)$.
5. Dire che cosa rappresentano i seguenti sistemi:

$$\begin{array}{lll} 3x - y + 2z = 0 & & x - z = 1 \\ a) \quad -x + y + 2z = 0, & b) \quad x + y - 3z = 0, & c) \quad x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + 3z = 4 & & 2x - 4y + 2z - 5 = 0 \end{array}$$

6. -Determinare, se esiste, il punto di intersezione della retta r di equazioni $x - 3y - z = 0$, $2x + 3y + 2z - 5 = 0$ con il piano di equazione $3x + z - 5 = 0$. In caso contrario dire se r ed α sono paralleli o si appartengono.
7. Dire se le equazioni $x = 3t + t'$, $y = t + (1/3)t'$, $z = 2t + (2/3)t'$, al variare dei parametri reali t, t' , rappresentano le equazioni parametriche di un piano.
8. Vedere se il punto $P = (1, 0, 2)$ appartiene o meno alla retta r di equazioni $x = 2t + 1$, $y = t - 1$, $z = t + 2$ o al piano α di equazioni $x = t + t' + 1$, $y = 3t$, $z = 5t' + 2$.

9. Determinare un vettore direttore per la retta r di equazioni parametriche $x = -2t + 1$, $y = 2t - 4$, $z = t + 3$ e scrivere equazioni parametriche per la retta r' parallela ad r passante per $P = (1, 3, -4)$.
10. Determinare, se esiste, il punto di intersezione della retta r di equazioni parametriche $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3 - t$ con il piano α di equazione $3x - y + z - 1 = 0$. In caso contrario dire se r è parallela ad α oppure se r è contenuta in α .
11. Scrivere equazioni parametriche per il piano α passante per l'origine ed avente come coppia di vettori di giacitura il vettore $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$ ed un vettore direttore della retta r di equazioni parametriche $x = t$, $y = t$, $z = t + 1$.
12. Verificare che la retta r di equazioni parametriche $x = 1 + t$, $y = t$, $z = 3t$ appartiene al piano α di equazione $2x + y - z - 2 = 0$.
13. Trasformare le equazioni date nell'esercizio 8 in equazioni cartesiane e fare la verifica ivi richiesta.
14. Trovare equazioni cartesiane per la retta r dell'esercizio 10 e svolgere il medesimo facendo uso di equazioni cartesiane.
15. Determinare un'equazione cartesiana per il piano α assegnato nello esercizio 11.
16. Fare la verifica dell'esercizio 12. facendo uso di equazioni cartesiane per la retta r .
17. Determinare i parametri direttori delle rette r ed s di equazioni rispettivamente: $x = 3t - 1$, $y = 1 + t$, $z = 3t$; $x - y + z - 5 = 0$, $x + 2y - 3z + 2 = 0$.
18. Si consideri un piano α che ammetta $\mathbf{v} = (3, 1, -1)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 1)$ come coppia di vettori di giacitura. Determinare coefficienti di giacitura per i piani paralleli ad α .
19. Determinare la posizione reciproca della retta r di equazioni $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 3t$ e del piano α di equazione $2x - y + z - 2 = 0$.
20. Vedere se la retta r di equazioni $x = 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$ e la retta s di equazioni $2x - y + z - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ sono parallele.
21. Vedere se la retta r di equazioni $2x - 3y + z - 1 = 0$, $x + y = 0$ ed il piano α di equazione $x - (3/2)y + (1/2)z = 0$ sono fra loro paralleli.
22. Determinare la posizione reciproca (incidenti, parallele o sghembe) delle due rette r ed s di equazioni rispettivamente: $x = 1 - t$, $y = 2t$, $z = 3t$;

$$x - y + z = 0, \quad 2x - y - z = 0.$$

23. Determinare la posizione reciproca (incidenti, paralleli o coincidenti) dei due piani α e β di equazioni rispettivamente $2x - y + z = 0$ e $x = 3t + t', y = t, z = t'$.

24. Determinare la posizione reciproca delle due rette:

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t \\ z = 1 - t \end{cases}.$$

3. LA GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO AFFINE

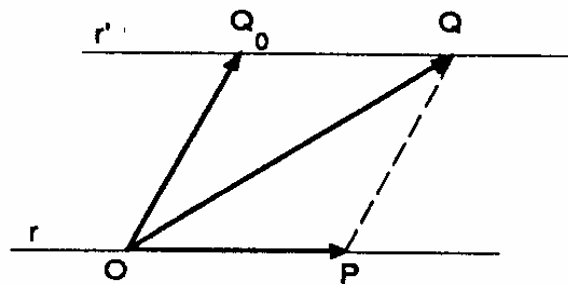
In questa sezione vogliamo esaminare il caso (più semplice) del piano euclideo $\mathcal{E}^2$ e dello spazio vettoriale bidimensionale $\mathcal{V}'_O$, più che altro per mettere in evidenza le analogie con il caso tridimensionale.

Fissiamo quindi un punto O in $\mathcal{E}^2$ ed una base i, j nello spazio $\mathcal{V}'_O$ dei segmenti orientati del piano. Queste scelte determinano la corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 &\longrightarrow \mathcal{V}'_O \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\longmapsto OP = xi + yj \longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

nella quale punti e rette di $\mathcal{E}^2$ corrispondono a sottovarietà affini di dimensione 0 e 1 in $\mathcal{V}'_O$ ed in $\mathbb{R}^2$ dove ammettono sia equazioni di tipo parametrico che cartesiano. Esplicitamente le rette in $\mathcal{V}'_O$ (come in $\mathcal{V}_O$) sono caratterizzate dall'equazione vettoriale:

$$(3.1) \quad OQ = OP + OQ_0.$$



Il passaggio ad $\mathbb{R}^2$ dà luogo ad equazioni parametriche:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt, \end{aligned}$$

dove $v = (l, m) \neq 0$ è un generatore per il sottospazio parallelo.

Notare che le equazioni parametriche di una retta nel piano si ottengono dalle analoghe scritte nello spazio sopprimendo semplicemente la terza equazione e quindi valgono per esse tutte le proprietà già viste nello spazio.

I sistemi lineari sono ora in due variabili e precisamente:

$$(3.3) \quad ax + by + c = 0 \quad rg \mid a \quad b \mid = 1,$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned} \quad rg \left| \begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \end{array} \right| = 2.$$

Le formule (3.3) e (3.4) danno rispettivamente l'equazione cartesiana di una retta r e quelle del punto P_0 di intersezione delle due rette r ed s , rappresentate rispettivamente dalla prima e dalla seconda equazione del sistema (3.4).

Va sottolineato che una retta nel piano è rappresentata da una sola equazione (in due variabili), mentre nello spazio una sola equazione (in tre variabili), rappresenta un piano!

Quindi vi è perfetta analogia fra le *rette* dello spazio e le *rette* del piano, se ci si riferisce ad *equazioni parametriche*; l'analogia è invece fra *piani* dello spazio e *rette* del piano, se ci si riferisce ad *equazioni cartesiane* (con l'avvertenza che in ogni caso il numero delle variabili passa da tre a due).

Così, ad esempio, l'equazione:

$$(3.5) \quad \lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$$

ottenuta combinando linearmente le due equazioni di (3.4) rappresenta il *fascio di rette* di centro il punto P_0 che è il punto di intersezione delle due rette rappresentate dalle due equazioni di (3.4) (analogo del fascio di piani nello spazio in quanto ci stiamo riferendo ad equazioni cartesiane!). La (3.5) rappresenta la totalità delle rette passanti per P_0 e può essere riscritta facendo uso, invece dei due parametri omogenei λ, μ , di un unico parametro k . Ne segue che le rette di un fascio (proprio) nel piano costituiscono un sistema lineare ∞^1 .

In modo analogo un *fascio improprio di rette* nel piano si scrive con l'equazione:

$$(3.5') \quad ax + by + k = 0,$$

al variare del parametro k , e rappresenta tutte le rette parallele alla retta fissata di equazione $ax + by = 0$.

La condizione di *parallelismo* fra due rette si scrive :

$$(3.6) \quad a : a' = b : b',$$

ovvero:

$$(3.7) \quad l : l' = m : m',$$

a seconda che ci riferiamo ai coefficienti delle equazioni cartesiane delle due rette o ai loro parametri direttori.

La condizione di *parallelismo* di un vettore $v = (l, m)$ e della retta $ax + by + c = 0$ si scrive:

$$(3.8) \quad al + bm = 0,$$

che è equivalente a:

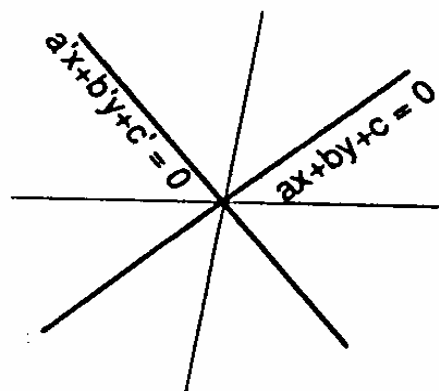
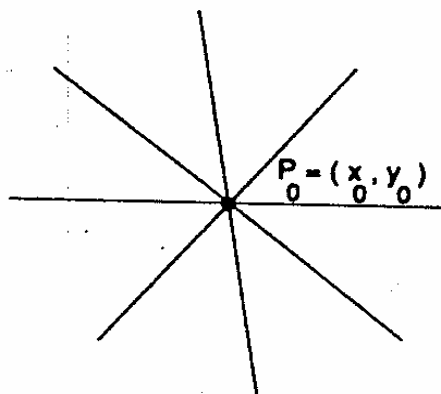
$$(3.8') \quad -b : a = l : m.$$

Da essa si legge che per la retta $ax + by + c = 0$ i *parametri direttori* sono, per esempio, la coppia di numeri $-b, a$.

FORME PARTICOLARI DELL'EQUAZIONE DI UNA RETTA. L'equazione:

$$(3.9) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

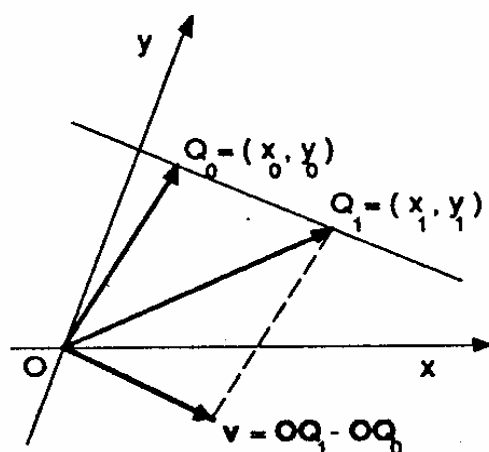
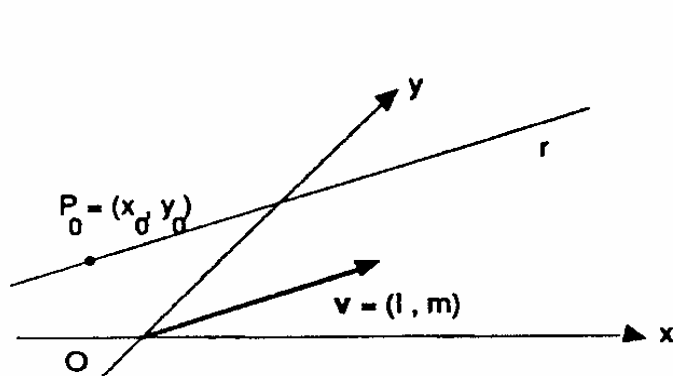
rappresenta una retta passante per il punto $P_0(x_0, y_0)$ e varia al variare dei coefficienti omogenei a e b ; questo è dunque un altro modo di rappresentare il *fascio di rette* di centro P_0 . È utile usare la (3.9) quando sia noto il centro di un fascio, mentre è utile la (3.5) quando siano note due sue rette.



L'equazione:

$$(3.10) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

equazione sotto forma di rapporti uguali,



si ottiene eliminando il parametro t dalle equazioni parametriche (3.2).

L'equazione:

$$(3.11) \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{equazione della retta per due punti,}$$

si ottiene osservando che se Q_0 e Q_1 sono i due punti dati, il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{OQ}_1 - \mathbf{OQ}_0 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ è un vettore direttore per la retta passante per essi.

Le equazioni:

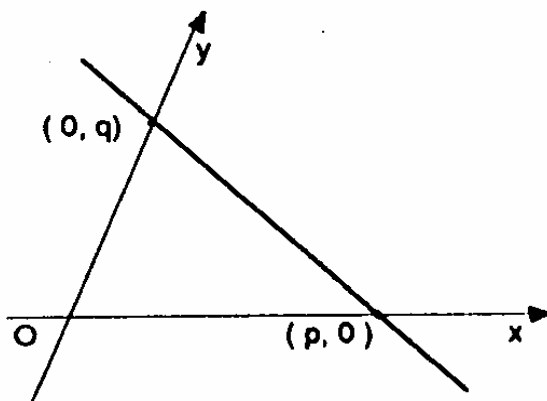
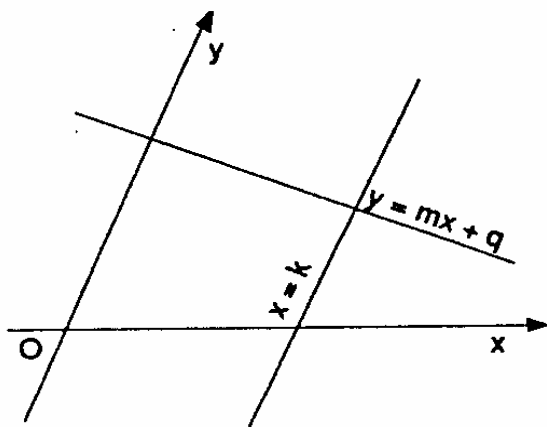
$$(3.12) \quad x = k, \quad y = h,$$

rappresentano rispettivamente le rette parallele all'asse y ed all'asse x .

Le rette di equazione $y = mx + q$, al variare di m e q rappresentano tutte le rette del piano tranne le parallele all'asse y , infatti i parametri direttori sono $(1, m)$ che danno un vettore $\mathbf{v}$ non appartenente all'asse y ; analoga discussione vale per l'equazione $x = ly + p$:

$$(3.13) \quad x = ly + p, \quad y = mx + q \quad \text{equazioni ridotte.}$$

Dalla forma ridotta dell'equazione di una retta si legge che le rette del piano formano un sistema lineare ∞^2 .



$$(3.14) \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad \text{equazione segmentaria,}$$

mette in evidenza i punti di intersezione $(p, 0)$ e $(0, q)$ della retta con gli assi coordinati. Tale equazione rappresenta una qualunque retta che non passi per l'origine e si ottiene dall'equazione cartesiana $ax + by + c = 0$, dividendo per $-c \neq 0$ e ponendo $p = -c/a$, $q = -c/b$.

3.E Esercizi

Riferimento $RA(O, x, y)$ nel piano ordinario.

1. Determinare equazioni parametriche e un'equazione cartesiana per la retta passante per $P = (1, 3)$ ed avente vettore direttore $\mathbf{v} = (3, -1)$.
2. Determinare parametri direttori per la retta $3x + 7y - 1/2 = 0$.
3. Dire se il sistema di equazioni $3x - y - 1 = 0$, $3x - y = 0$ rappresenta o meno un punto.
4. Vedere se le due rette sono incidenti, parallele o coincidenti:

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + t \end{cases}, \quad s: 3x - y + 1 = 0.$$

5. Scrivere equazioni per il fascio di rette di centro il punto $P = (-1, -3)$.
6. Scrivere un'equazione per la retta passante per $P = (-2, 5)$ ed appartenente al fascio generato dalle rette r ed s di equazioni rispettivamente:

$$r: \begin{cases} x = -t - 2 \\ y = 2t + 5 \end{cases}, \quad s: 2x + y + 3 = 0.$$

7. Scrivere equazioni parametriche e un'equazione cartesiana per la retta passante per i punti $P = (0, 1)$ e $Q = (0, -2)$.
8. Scrivere, se possibile, l'equazione segmentaria della retta $x = 1 - 3t$, $y = 2 + t$.

9. Scrivere, se possibile, equazioni ridotte per le seguenti rette:

$$r: 2x - 3y + 5 = 0, \quad s: \begin{cases} x = (1/2)t - 3 \\ y = -7t + 21 \end{cases}, \quad r': x - 5 = 0, \quad s': \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases}.$$

10. Scrivere un'equazione per la retta r passante per i punti $P = (1, 1)$, $Q = (-1, 3)$ e un'equazione per il fascio di rette ad essa parallele. Fra queste ultime determinare quella che passa per il punto $R = (3, 3)$.

4. FORME PARTICOLARI DELLE EQUAZIONI CARTESIANE DI RETTE E PIANI NELLO SPAZIO. RISOLUZIONE GEOMETRICA DI ALCUNI PROBLEMI

Le equazioni dei piani coordinati sono rispettivamente:

$$(4.1) \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

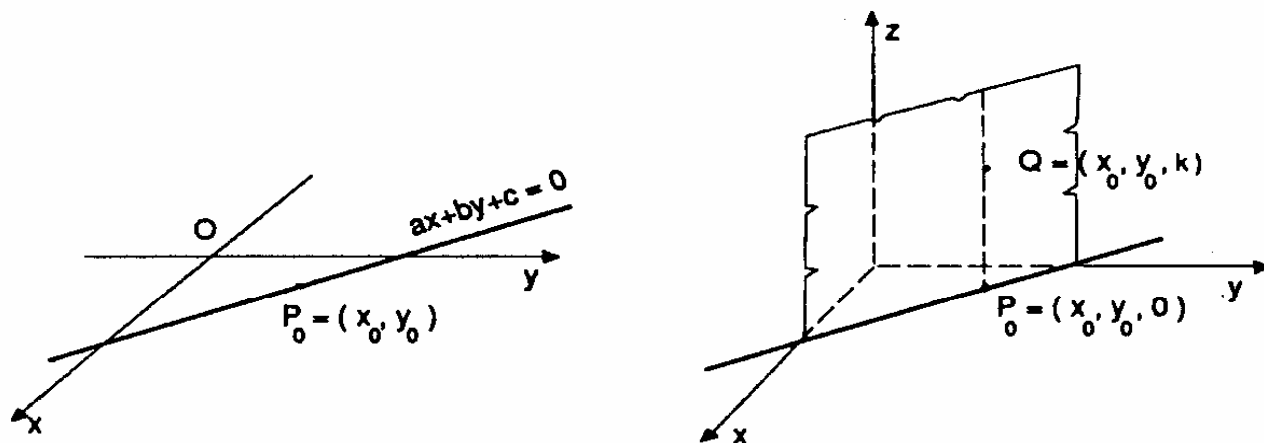
I piani paralleli ai piani coordinati sono rappresentati rispettivamente da:

$$(4.2) \quad x = k, \quad y = k, \quad z = k.$$

Le equazioni:

$$(4.3) \quad ax + by + d = 0, \quad ax + cz + d = 0, \quad by + cz + d = 0,$$

rappresentano rispettivamente i piani *paralleli all'asse z* , all'asse y e all'asse x . Infatti, se per un momento ignoriamo lo spazio e consideriamo il solo piano x, y , sappiamo che l'equazione $ax + by + d = 0$ rappresenta una retta r ed un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ verifica la condizione $ax_0 + by_0 + d = 0$.



Nello spazio il punto $Q = (x_0, y_0, k)$, al variare di k , descrive la retta per P_0 e parallela all'asse z e le sue coordinate verificano ancora l'equazione del piano $ax + by + d = 0$, in quanto in essa non figura la variabile z . Al variare di P_0 su r dunque tale piano appare come luogo di rette parallele all'asse z e l'affermazione è completamente provata.

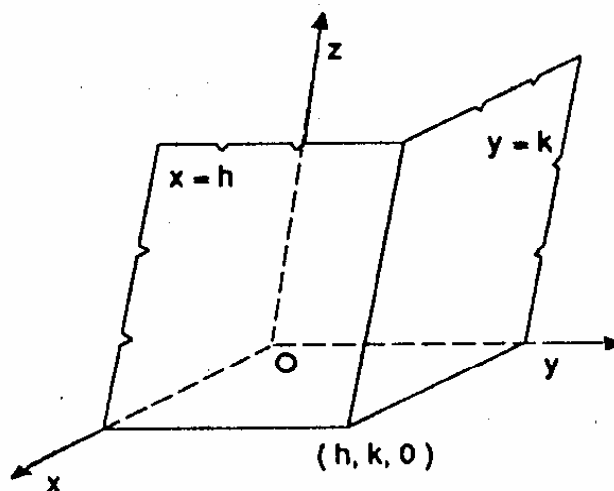
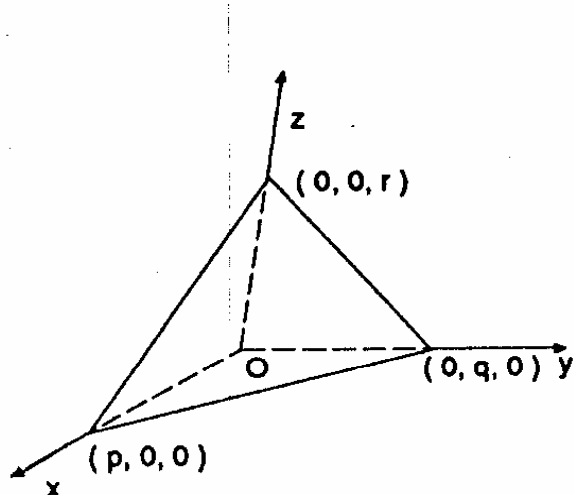
L'equazione:

$$(4.4) \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \quad \text{equazione segmentaria del piano,}$$

mette in evidenza i punti di intersezione del piano con gli assi coordinati.

Le equazioni:

$$(4.5) \quad \begin{array}{lll} y = h & x = h & x = h \\ z = k & z = k & y = k \end{array}$$



rappresentano rispettivamente le rette parallele all'asse x , all'asse y , all'asse z . In particolare gli *assi coordinati* hanno equazione:

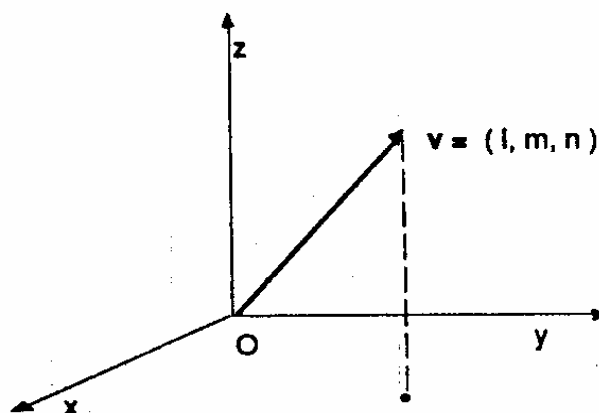
$$(4.6) \quad \begin{array}{lll} y = 0 & x = 0 & x = 0 \\ z = 0 & z = 0 & y = 0 \end{array}$$

Le equazioni:

$$(4.7) \quad \begin{array}{lll} x = lz + p & x = ly + p & y = mx + p \\ y = mz + q & z = ny + q & z = nx + q \end{array}$$

si chiamano *equazioni ridotte* di una retta e sono dei tre tipi indicati.

Per esempio il primo sistema, al variare dei parametri l, m, p, q , rappresenta tutte le rette dello spazio, escluse le rette parallele al piano $z = 0$. Infatti i parametri direttori sono $(l, m, 1)$, (basta porre $z = t$ per ottenere equazioni parametriche!); ma un tal vettore non appartiene al piano x, y .



Analogamente il secondo sistema rappresenta tutte le rette escluse le parallele al piano $y = 0$, il terzo esclude le parallele al piano $x = 0$. In ogni caso *una retta qualunque dello spazio può essere rappresentata in una almeno delle tre forme ridotte*, in quanto non vi è nessuna retta che sia simultaneamente parallela ai tre piani coordinati. A partire da equazioni cartesiane di una retta si possono

dedurre equazioni ridotte risolvendo il sistema dato rispetto a due delle tre variabili.

Da una qualunque delle forme ridotte deduciamo che le rette dello spazio costituiscono un *sistema lineare* ∞^4 , in quanto in essa figurano quattro coefficienti essenziali.

Vogliamo ora dare forme di equazioni particolarmente utili per rette e piani che siano individuati tramite condizioni di passaggio per punti o per rette (condizioni di appartenenza o di incidenza), e/o tramite condizioni di parallelismo, forme che permettono di risolvere rapidamente una vasta collezione di esercizi.

RETTE PER DUE PUNTI $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $Q_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Il vettore $\mathbf{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ è un vettore direttore; quindi si scrivono immediatamente:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z &= z_0 + (z_1 - z_0)t \end{aligned} \quad \text{equazioni parametriche,}$$

ovvero le uguaglianze:

$$(4.9) \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad \text{equazioni sotto forma di rapporti uguali,}$$

che danno luogo a due equazioni. Se uno dei denominatori è nullo, per esempio $x_1 - x_0 = 0$, da (4.8) si deducono le equazioni:

$$(4.10) \quad \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \quad x - x_0 = 0$$

Quindi se nella (4.9) uno o due denominatori si annullano, la catena di uguaglianze perde di significato; ma equazioni si ottengono annullando i corrispondenti numeratori. La (4.10) in particolare rappresenta l'equazione di una retta parallela al piano $x = 0$.

RETTE PER UN PUNTO $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Costituiscono una *stella di rette*, ovvero un *sistema lineare* ∞^2 di rette di equazioni:

$$(4.11) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

al variare dei parametri omogenei l, m, n (i parametri essenziali sono quindi due soli!).

RETTE PER UN PUNTO $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ E PARALLELE AL VETTORE $\mathbf{v} = (l, m, n)$. È data dall'equazione (4.11) ove ora i parametri direttori sono assegnati.

PIANI PASSANTI PER UN PUNTO $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Essi hanno equazione

$$(4.12) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

al variare dei coefficienti omogenei a, b, c . Si ha così la rappresentazione per la stella di piani di centro il punto Q_0 che abbiamo già visto nella sezione 2.

PIANI PASSANTI PER UNA RETTA r . Convien rappresentare r con equazioni cartesiane, combinando linearmente le quali si ottiene la corrispondente equazione del fascio (cfr. sezione 2.).

PIANO PER UN PUNTO E PER UNA RETTA CHE NON SI APPARTENGONO: $Q_0 \notin r$. Basta rappresentare innanzi tutto i piani del fascio di asse r e determinare i parametri omogenei λ e μ (ovvero il parametro non omogeneo k) imponendo che l'equazione del fascio sia soddisfatta dalle coordinate del punto Q_0 .

PIANO PER TRE PUNTI NON ALLINEATI $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $Q_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $Q_2 = (x_2, y_2, z_2)$. I vettori:

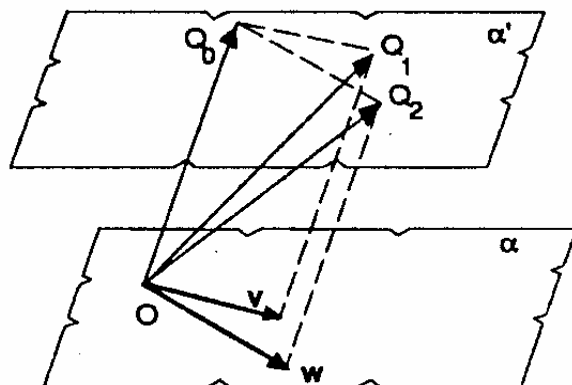
$$\mathbf{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \quad \mathbf{w} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0),$$

sono una coppia di vettori di giacitura per il piano cercato. Si possono quindi scrivere subito le equazioni parametriche:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)t + (x_2 - x_0)t' \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)t + (y_2 - y_0)t' \\ z &= z_0 + (z_1 - z_0)t + (z_2 - z_0)t' \end{aligned}$$

Un'equazione cartesiana si ottiene rappresentando i piani per Q_0 tramite l'equazione (4.12) e determinandone i coefficienti di giacitura a, b, c (come indicato in (2.18)) facendo uso della condizione di parallelismo con i vettori $\mathbf{v} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OQ_0}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OQ_0}$.

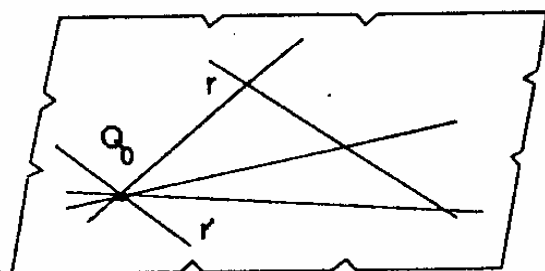
Vi è inoltre un procedimento rapido di scrittura, per chi ama i determinanti:



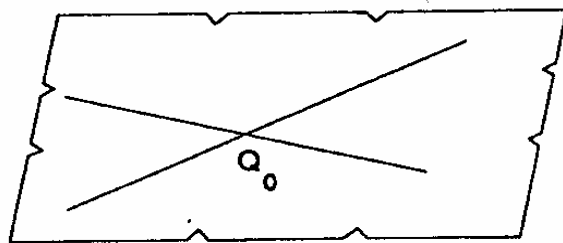
$$(4.14) \quad \det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

del tutto equivalente al procedimento sopra indicato e che fornisce un'equazione dello stesso piano, in quanto esprime la dipendenza dei tre vettori riga della matrice scritta in (4.14), dipendenza che si legge anche dalle equazioni (4.13) (basta scrivere x_0, y_0, z_0 a primo membro).

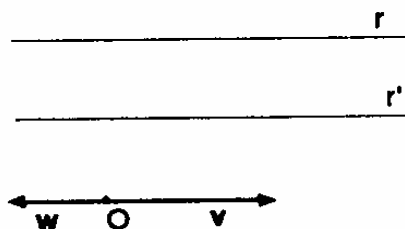
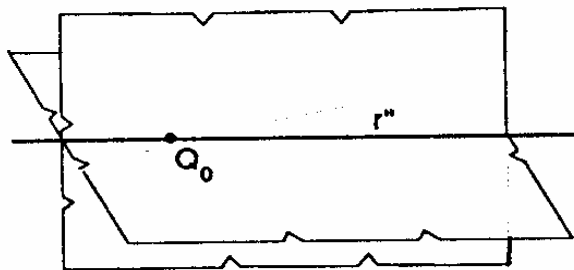
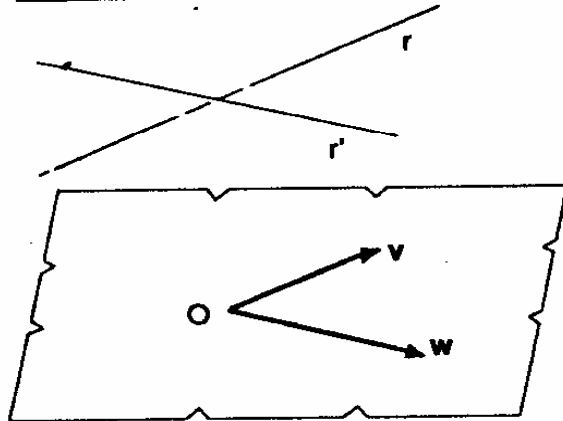
RETTE PER UN PUNTO Q_0 INCIDENTI AD UNA RETTA r , $Q_0 \notin r$. Sono tutte le rette che appartengono al piano per Q_0 e per r , esclusa la retta r' per Q_0 e parallela ad r (che non soddisfa la richiesta condizione di incidenza).



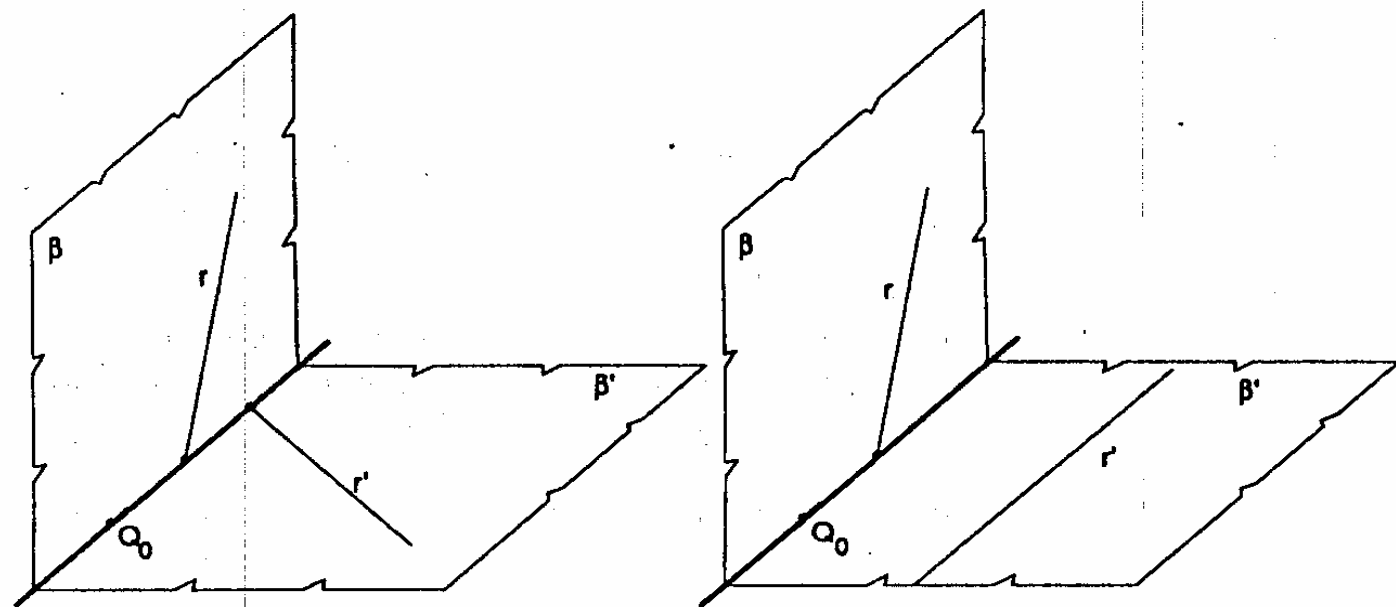
PIANO PARALLELO A DUE RETTE r ED r' E PASSANTE PER UN PUNTO Q_0 . I vettori v e w direttori rispettivamente per le rette r e r' individuano una coppia di vettori di giacitura per il piano cercato se e solo se sono indipendenti. In tal caso il piano è *unico* e per esso si possono scrivere direttamente le equazioni (4.13) oppure la (4.14).



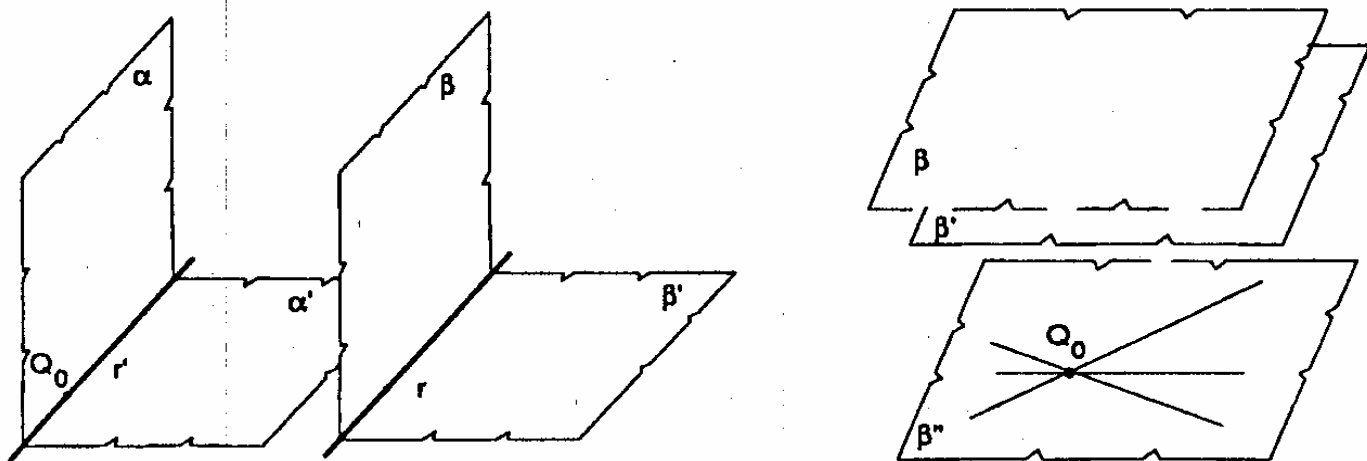
Se r ed r' sono parallele i vettori v e w sono sulla stessa retta e non individuano una giacitura. In questo caso il problema proposto ammette infinite soluzioni costituite da tutti i piani del fascio di asse la retta r'' passante per Q_0 e parallela ad r .



RETTE INCIDENTE A DUE RETTE SGHEMME r ED r' E PASSANTE PER UN PUNTO Q_0 NON APPARTENENTE AD ESSE. Le rette r ed r' sono per ipotesi sghembe, cioè non esiste un piano che le contiene; inoltre $Q_0 \notin r$, $Q_0 \notin r'$. Tale retta, se esiste, deve giacere sul piano β per Q_0 ed r e sul piano β' per Q_0 ed r' . La retta cercata, se esiste, deve appartenere all'intersezione dei due piani β e β' di cui sappiamo determinare le equazioni. Il problema d'altra parte non ha soluzione se la retta $\beta \cap \beta'$ è parallela alla retta r o alla retta r' .



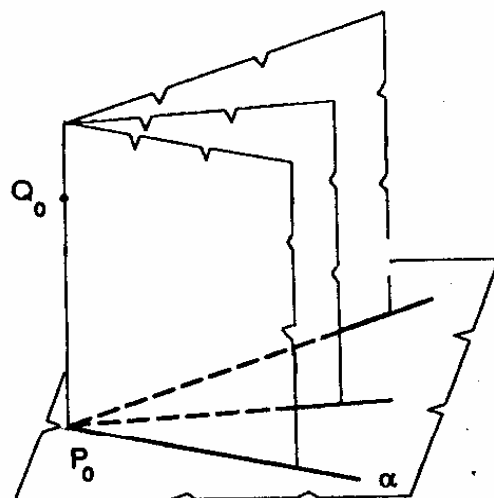
RETTE PARALLELA A DUE PIANI β E β' E PASSANTE PER UN PUNTO Q_0 . Se i due piani β e β' dati non sono paralleli, essi individuano una retta $r = \beta \cap \beta'$ e la retta cercata è l'unica parallela r' alla retta r passante per il punto Q_0 . Se β e β' sono paralleli ogni retta passante per Q_0 ed appartenente al piano β'' per questo punto e parallelo a β , soddisfa la condizione richiesta.



Notiamo che, nel caso la retta richiesta r' sia unica, un modo

per rappresentarla è di determinare i piani α e α' per Q_0 paralleli rispettivamente a β e β' , infatti $r' = \alpha \cap \alpha'$.

FASCIO DI RETTE NELLO SPAZIO. Vogliamo rappresentare la totalità delle rette di un piano fissato α e passanti per un punto $P_0 \in \alpha$. Per far ciò basta fissare un punto $Q_0 \notin \alpha$ e considerare la retta r che passa per P_0 e Q_0 . Il fascio di piani di asse r interseca il piano α nelle rette del fascio richiesto.



Abbiamo qui indicato alcuni procedimenti geometrici per determinare rette o piani soggetti a condizioni e che vanno ovviamente attuati tramite la geometria analitica.

La scelta, fra le varie possibili, con cui rappresentare gli enti può dar luogo ad una soluzione più o meno rapida. Lo studente deve di volta in volta proporsi il problema di evitare calcoli inutili!

Rimandiamo gli esercizi numerici alla sezione 5.E in quanto vogliamo ulteriormente chiarire l'importanza della conoscenza dei gradi di libertà degli enti che vogliamo rappresentare.

5*. GRADI DI LIBERTÀ E CONDIZIONI LINEARI

Quando si cerca di determinare una sottovarietà affine (o un sottospazio) soggetta a condizioni (di appartenenza e/o di parallelismo) è utile conoscere "a priori" se il problema non ammette soluzioni, oppure ne ammette una o infinite (come abbiamo visto in alcuni esempi della sezione precedente), ovvero il numero di parametri essenziali da cui dipende la sottovarietà quando non è soggetta ad alcuna condizione ed il numero di condizioni (lineari) indipendenti che si devono imporre. Se questo numero è superiore ai gradi di libertà il problema non ammette soluzione; se è uguale la soluzione è unica; se è inferiore le soluzioni sono infinite.

Abbiamo già imparato, nelle sezioni precedenti, a contare i gradi di libertà: i piani ed i punti dello spazio sono due sistemi lineari ∞^3 , le rette sono un sistema ∞^4 , etc..

Occorre ora analizzare le condizioni di appartenenza e di parallelismo.

CONDIZIONE DI PASSAGGIO PER UN PUNTO $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Ad un piano si impone *una condizione lineare*, cioè i coefficienti a, b, c, d del piano devono soddisfare la relazione:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0;$$

ad una retta, si impongono *due condizioni lineari*: l'appartenenza del punto a due dei piani passanti per la retta.

CONDIZIONI DI PARALLELISMO. Il parallelismo di una retta ad una retta data, di parametri direttori noti l', m', n' , impone *due condizioni lineari*, le due uguaglianze che si deducono da:

$$l : l' = m : m' = n : n'.$$

Il parallelismo di un piano ad un piano dato, di coefficienti noti a', b', c' , impone *due condizioni lineari*:

$$a : a' = b : b' = c : c'.$$

Il parallelismo di un piano ad una retta data, di parametri direttori noti l, m, n , impone *una condizione lineare*:

$$al + bm + cn = 0,$$

ed ancora *una condizione lineare*, la stessa, si ottiene imponendo ad una retta il parallelismo con un piano assegnato.

La condizione per un piano, che ha tre gradi di libertà, di contenere una retta assegnata impone dunque *due condizioni lineari*, in quanto basta imporre che tale piano contenga due punti (fissati e distinti) della retta. Se ne deduce che i piani passanti per una retta sono ∞^1 .

Se si richiede ad un piano di contenere quattro punti assegnati, cioè quattro condizioni lineari, tale piano in generale non esiste, le condizioni sono troppe!, a meno che tali condizioni siano dipendenti, il che avviene quando i quattro punti dati sono in posizione speciale (complanari), o in posizione più speciale (allineati) o in posizione ancora più speciale (coincidenti). Se si presentano queste eventualità sappiamo già che rispettivamente si ottiene un sol piano oppure tutti i piani di un fascio oppure tutti i piani di una stella.

Vediamo quindi che un calcolo esatto delle soluzioni di un problema di questo tipo lo sappiamo fare solo se siamo in grado di riconoscere l'indipendenza delle condizioni imposte.

Non vorrei che queste considerazioni inducessero lo studente a risolvere i problemi “*per condizioni*”!. Non è certamente questo, bensì *metodi geometrici*, quello che abbiamo illustrato nella sezione 4. Il *computo a priori* dei gradi di libertà e delle condizioni lineari da imporre è in ogni caso *utile* perché ci dice il “numero” delle soluzioni che ci dobbiamo aspettare, nel caso le condizioni siano indipendenti. Se poi tali condizioni sono dipendenti, le soluzioni non possono che aumentare! Se per esempio si deve ricercare la totalità delle rette parallele a due piani β e β' e passanti per un punto Q_0 , questo equivale ad imporre ad una retta variabile nello spazio, che ha quattro gradi di libertà, due condizioni lineari per il parallelismo ai due piani assegnati e due condizioni lineari per il passaggio per Q_0 e quindi “*in generale*” ci aspettiamo che vi sia *una* soluzione, che andremo a cercare con il metodo geometrico proposto alla fine della sezione precedente dove è anche indicato un caso in cui le condizioni imposte non sono indipendenti.

Il *computo* delle condizioni è importante in geometria anche se le condizioni imposte non sono lineari, il che può accadere quando si studino curve e/o superfici.

5.E Esercizi

Riferimento affine $RA(0, x, y, z)$ nello spazio ordinario.

1. Sia r la retta di equazioni parametriche $x = -1 + t$, $y = -2t$, $z = 1 + 3t$ e sia $Q = (1, 1/2, 3)$. Verificare che Q non appartiene ad r e determinare un'equazione cartesiana per il piano α passante per Q ed r .
2. Siano r ed s le rette di equazioni parametriche rispettivamente $x = t + 1$, $y = -t + 4$, $z = (1/2)t - 1$; $x = t + 5$, $y = 2t + 1$, $z = -t - 3$. Determinare, se esiste, un'equazione cartesiana per il piano α passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e parallelo simultaneamente ad r ed s .
3. Determinare equazioni parametriche per la retta r passante per $P = (0, 0, 1)$ e parallela ai due piani α e β di equazioni rispettivamente $3x + 2y - z = 0$, $-2x + 3y - 2z + 1 = 0$.
4. Sia r la retta di equazioni $x = (-1/2)t - 2$, $y = -3t + 4$, $z = t - 1$ ed s la retta di equazioni $x - y - z + 2 = 0$, $2x + y + 3z + 5 = 0$; studiare la loro posizione reciproca e, nel caso esse siano complanari, determinare un'equazione del piano che le contiene.
5. Scrivere equazioni parametriche ed un'equazione cartesiana per il piano passante per i punti di coordinate $(0, 0, 1)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$.

6. Determinare tutte le possibili equazioni ridotte per la retta di equazioni parametriche $x = t$, $y = -4t - 2$, $z = 1 - 2t$.
7. Determinare equazioni per la retta r , se esiste, passante per il punto $P = (0, -1, -1)$, parallela al piano α di equazione $2x - y - 3z + 1 = 0$ ed incidente alla retta s di equazioni $2x + 3y - 1 = 0$, $x + z - 3 = 0$.
8. Sia r la retta di equazioni $x = 3\tau + 1$, $y = -2\tau$, $z = 2 - \tau$ e sia R un punto variabile su di essa. Determinare, se possibile, R in modo tale che il vettore $\overrightarrow{OR}$ sia parallelo al piano α di equazione $x - y + z = 0$.
9. Sia R un punto variabile sulla retta r di equazioni $x = 2t$, $y = t - 2$, $z = -t + 2$ e sia S un punto variabile sulla retta s di equazioni $x = 2\tau - 1/2$, $y = -\tau$, $z = 3\tau$. Determinare, se possibile, R ed S in modo tale che il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}$ sia parallelo alla retta p di equazioni $-x + y - 2z = 0$, $x + 2y - 1 = 0$.
10. Verificare se i tre piani α, β, γ di equazioni rispettivamente $x - y - z = 0$, $x - 2z - 1 = 0$, $y - z + 5 = 0$ si intersecano a due a due in tre rette parallele e distinte.
11. Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per il punto $P = (-1, 1, -2)$, parallela al piano γ di equazione $2x - 3y + 5z = 0$ ed incidente all'asse z .
12. Riconoscere che le equazioni $x = 3v + w$, $y = v + 4w + 1$, $z = v - w$, al variare dei parametri reali v e w , rappresentano un piano α di cui si chiede un'equazione cartesiana. Verificato che il punto $P = (0, 1, 0)$ appartiene ad α , scrivere equazioni per il fascio di rette del piano α e di centro P , facendo uso di un parametro non omogeneo.
13. Determinare, se esiste, la retta passante per il punto $P = (1, -2, -1)$ ed incidente simultaneamente alle due rette r ed s date rispettivamente dalle equazioni: $x = 2z - 1$, $y = -z + 2$; $x = t + 5$, $y = t - 2$, $z = -t$.
14. Date le rette r ed s di equazioni rispettivamente $x - y + z = 0$, $x + 2z - 1 = 0$; $x = 2t - 1$, $y = 2t + 5$, $z = 1 - 2t$ determinare, se esiste, il piano passante per s e parallelo ad r .

6*. SUI FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

La geometria euclidea ha un carattere intuitivo (fortunatamente!) ma è di fatto costruita su un sistema di assiomi che Euclide (300 A.C) presenta nel libro "Gli Elementi". In questo testo gli assiomi sono introdotti di

volta in volta quando se ne presenta la necessità e sono del tutto naturali, o almeno sembrano tali alla luce dell'esperienza umana. È probabile che lo studente abbia sentito parlare solo di alcuni di essi (postulato delle parallele, postulato della continuità) ma certamente non ha mai approfondito questo aspetto della geometria euclidea. Per questo motivo vogliamo presentare tali assiomi seguendo la trattazione fatta da Hilbert (1862-1943) la quale non si discosta dalla trattazione classica di Euclide, ma tiene conto, anche in senso critico, dello sviluppo della matematica avvenuto durante molti secoli ed in particolare nel secolo XIX. Hilbert (cfr. [Hi], testi consigliati) sceglie quindi il punto di vista *ipotetico-deduttivo* il quale consiste nel *non* definire esplicitamente gli oggetti geometrici fondamentali: "punti", "rette", "piani" ma di definirli *implicitamente* per mezzo di *assiomi*. Si possono così ampliare gli oggetti geometrici definendone altri (segmenti, angoli, triangoli) e la geometria che si ottiene è costituita da tutte quelle proposizioni che si possono dedurre dagli assiomi (ipotesi) e da altre proposizioni già precedentemente ricavate.

Gli assiomi sono divisi da Hilbert in cinque gruppi: assiomi di collegamento, assiomi dell'ordinamento, assiomi di congruenza, assioma delle parallele, assiomi di continuità. A ciascuno gruppo Hilbert fa seguire la dimostrazione della compatibilità dei corrispondenti assiomi e l'indipendenza da quelli dei gruppi già precedentemente introdotti tramite la presentazione di "modelli" costruiti a partire da altri campi della matematica, per esempio l'algebra. Egli dimostra infine che vi è un'unica geometria che verifica gli assiomi dei cinque gruppi, che viene detta *geometria euclidea* dello spazio, che abbiamo denotato con $\mathcal{E}^3$. Nel testo abbiamo fatto uso del modello analitico $\mathbb{R}^3$ che Hilbert presenta per provare la compatibilità di tutti gli assiomi posti.

Diamo infine la lista degli assiomi, che riportiamo nel linguaggio il più possibile familiare allo studente, facendoli seguire solo da brevi commenti. Nel seguito ogni qual volta nominiamo punti, oppure rette o piani, intenderemo che siano *distinti*.

I. ASSIOMI DI COLLEGAMENTO (O DI APPARTENENZA): stabiliscono un collegamento fra gli oggetti "punti", "rette", "piani" precisando il significato dei verbi appartenere, passare, giacere, contenere etc.

I.1. *Per due punti passa almeno una retta.*

I.2. *Per due punti passa al più una retta.*

I.3. *Su una retta vi sono almeno due punti e vi sono almeno tre punti che non giacciono su una stessa retta.*

I.4. *Per tre punti, che non appartengono alla stessa retta, passa almeno un piano. Su ciascun piano vi è almeno un punto.*

- I.5. *Per tre punti, che non appartengono alla stessa retta, passa al più un piano.*
- I.6. *Se due punti di una retta appartengono ad un piano, tutti i punti della retta appartengono al piano.*
- I.7. *Se due piani hanno in comune un punto, allora hanno in comune almeno un altro punto.*
- I.8. *Vi sono almeno quattro punti che non stanno in un piano.*

A titolo di esempio diamo la "dimostrazione" di una proposizione ben nota (?) allo studente.

PROPOSIZIONE 6.1. *Per una retta r ed un punto C , non appartenente ad essa, passa un unico piano che li contiene.*

DIM. Siano A, B due punti di r (essi esistono per I.3); per I.2, I.4 ed I.5 esiste ed è unico il piano che contiene i punti A, B, C , e tale piano contiene r per I.6. ♣

Se ci si limita alla geometria euclidea del piano gli assiomi di collegamento sono solo I.1, I.2 e I.3; per la retta bastano i primi due e la prima parte del terzo. Lo studente provi, per esempio, a dedurre da essi che due rette di un piano o non hanno punti in comune oppure ne hanno uno solo! Una volta provato ciò si può definire nel modo usuale la nozione di rette parallele.

Un esempio di "geometria" che verifichi gli assiomi del primo gruppo si costruisce immediatamente. Prendiamo come insieme di punti un insieme di quattro elementi $\{a, b, c, d\}$; come insieme di rette scegliamo l'insieme delle coppie $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$; in modo analogo come insieme di piani scegliamo l'insieme delle terne di punti $\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$. È immediato che tutti gli assiomi di collegamento sono verificati quando si assuma come relazione di collegamento fra gli enti la relazione insiemistica di "contenuto". Si ottiene così un esempio di "spazio grafico".

II ASSIOMI DI ORDINAMENTO: tramite essi viene definita la nozione che precisa quando un punto giace "fra" altri due.

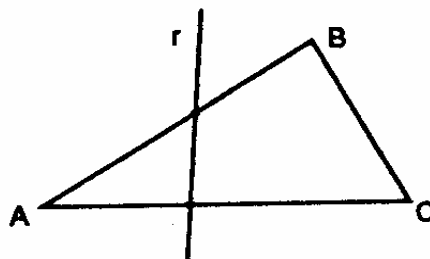
- II.1. *Se un punto B giace fra un punto A ed un punto C , allora A, B, C stanno su una stessa retta e B giace fra C e A .*
- II.2. *Dati comunque due punti A, B vi è almeno un punto C , sulla retta che li congiunge, tale che C giace fra A e B .*
- II.3. *Dati tre punti qualsiasi su una retta ve ne è al più uno che giace fra gli altri due.*

DEFINIZIONE 6.2. Si chiama *segmento* una coppia (non ordinata) di punti A, B . Esso viene indicato con AB oppure BA .

Gli assiomi permettono di chiamare *punti interni* del segmento i punti che giacciono fra A e B . I punti A e B si dicono *estremi* del segmento.

II.4. Siano A, B, C tre punti non allineati del piano α ed r una retta appartenente ad α la quale non passi per nessuno dei tre punti.

Allora, se la retta r passa per un punto del segmento AB , essa passa certamente per un punto del segmento AC , ovvero per un punto del segmento BC .



In base agli assiomi del I e II gruppo si può dimostrare che:

PROPOSIZIONE 6.3. Ogni segmento, e quindi ogni retta, contiene infiniti punti. Ogni retta r di un piano divide i punti del piano (che non stanno in r) in due regioni (semipiani) tali che per ogni coppia di punti A, A' che sono in semipiani diversi il segmento AA' incontra r in un punto, per ogni coppia nello stesso semipiano il segmento non la incontra. (Analogia proprietà vale per i piani dello spazio).

Notiamo che nozioni considerate "intuitive", in un contesto rigoroso, come quello presentato da Hilbert, devono essere dimostrate (nel senso che abbiamo già precisato).

Si possono dare ora la definizione di semiretta, quella di orientazione della retta, quella di angolo (convesso) di due semirette con la stessa origine e di punti interni all'angolo; si possono definire le figure poligonali, in particolare triangoli, etc. ritrovando le proprietà ben note. A titolo di esempio consideriamo la seguente:

DEFINIZIONE 6.4. Dati due punti O e U sulla retta r si chiama *semiretta* r' di origine O e contenente U l'insieme dei punti di r che sono interni al segmento OU , i suoi estremi ed i punti P tali che U giace fra O e P . La semiretta opposta è determinata da O e da un qualunque punto $U' \notin r'$.

La scelta della semiretta r' , di origine O e passante per il punto U , sulla retta r determina un'orientazione cioè un ordinamento totale dei suoi punti. Infatti indicata con r'' la semiretta opposta, si ha che P precede Q se e solo se vale una delle condizioni: 1) P giace fra O e Q e P, Q appartengono ad r' ; 2) Q giace fra O e P e P, Q appartengono ad r'' ; 3) P appartiene ad r'' e Q appartiene ad r' .

III. ASSIOMI DI CONGRUENZA: servono a definire il concetto di congruenza (uguaglianza) e quindi anche quello di movimento (sovrapponibilità).

III.1. (Trasporto del segmento) Sia AB un segmento ed a' una semiretta di origine A' ; si può sempre trovare su a' un punto B' tale che il

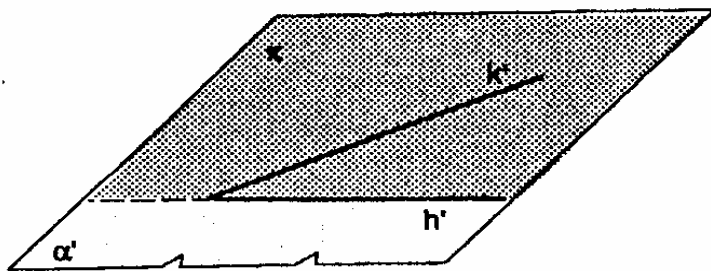
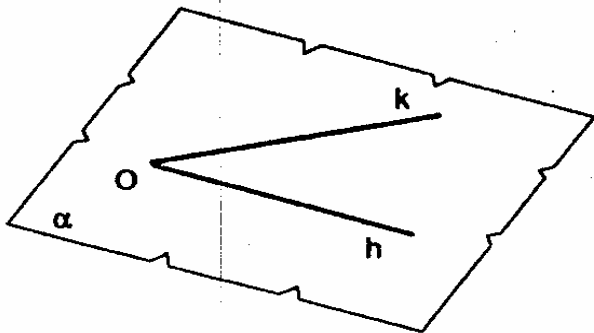
segmento AB è congruente ad $A'B'$; in simboli $AB \equiv A'B'$.



III.2. Se due segmenti sono congruenti ad un terzo, sono congruenti fra di loro.

III.3. (Addizionabilità dei segmenti) Siano A, B, C tre punti tali che B giace fra A e C ed A', B', C' altri tre punti tali che B' giace fra A' e C' ; se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$ allora $AC \equiv A'C'$.

III.4. (Trasporto dell'angolo) Siano h e k due semirette del piano α con la stessa origine O e sia h' una semiretta del piano α' di origine O' ed appartenente alla retta a' . Fissata comunque uno dei due semipiani π in cui a' divide α' , esiste ed è unica la semiretta k' in π , di origine O' , tale che l'angolo hk è congruente ad $h'k'$, in simboli



$hk \equiv h'k'$. Inoltre ogni angolo è congruente a se stesso.

III.5. Siano A, B, C ed A', B', C' due terne di punti non allineati. Se si hanno le congruenze $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $\hat{BAC} \equiv \hat{B'A'C'}$, si hanno anche le congruenze $\hat{ABC} \equiv \hat{A'B'C'}$ e $\hat{ACB} \equiv \hat{A'C'B'}$.

Nell'assioma III.1 non si suppone l'unicità del trasporto del segmento in quanto essa può venire dimostrata; nel caso del trasporto dell'angolo invece l'unicità non può essere dedotta dai postulati dei tre gruppi.

Lo studente si sarà reso conto, a questo punto, che stiamo via via arricchendo la geometria di nuovi enti geometrici e deducendo nuove nozioni e proprietà.

I postulati dei tre gruppi permettono, per esempio, di dimostrare le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva della congruenza fra segmenti e fra angoli oppure di definire la nozione di figure congruenti e di dedurre i ben noti criteri di uguaglianza dei triangoli. Essi permettono inoltre di provare:

PROPOSIZIONE 6.5. Data una retta r ed un punto $P \notin r$, esiste almeno una retta r' , sul piano individuato da P ed r , passante per P e parallela ad r .

Non si può invece dimostrare che tale parallela sia unica, anzi esistono esempi di geometrie in cui valgono tutti gli assiomi fin qui posti nonchè quelli di continuità, ma per un punto passano infinite parallele ad una retta data.

IV. ASSIOMA DELLE PARALLELE. *Data una retta r ed un punto P fuori di essa, esiste al più una retta r' , sul piano individuato da P ed r , passante per P parallela ad r .*

Questo postulato, che assicura l'unicità della parallela, insieme ai precedenti permette di dimostrare per esempio che gli angoli (interni) di un triangolo hanno per somma un angolo piatto.

La geometria, da Euclide in poi, si è sviluppata come scienza esatta che a partire da assiomi deduce proposizioni, teoremi etc.; tuttavia gli assiomi stessi erano considerati come "evidenti" in quanto presi dall'osservazione della "realtà geometrica esistente" cioè della realtà fisica, quasi che fosse quest'ultima a determinare gli assiomi stessi ed a garantire della loro necessità e non contraddittorietà. Al postulato delle parallele manca questo carattere di evidenza in quanto coinvolge in qualche modo l'"infinito" ed Euclide stesso lo introduce quando non può più farne a meno. Forse per questo motivo tanti tentativi sono stati fatti, nel corso dei secoli, per riuscire a dimostrarlo, ovviamente senza successo! Fino agli inizi del XIX secolo nessuno aveva osato avanzare il dubbio che la scelta degli assiomi fosse libera e non determinata dall'evidenza! Con i lavori di K.F. Gauss (1829, lettera a Bessel), N.I. Lobacevskij (1829) e di G. Bolyai ((1832) e poi quelli di A. Cayley (1859) e di B. Riemann (1854, pubblicazione del 1868) veniva confermata l'esistenza di "geometrie non euclidee" basate su un sistema di assiomi diverso da quello euclideo, la loro legittimità sia logica che di interpretazione di una "realtà geometrica".

V. ASSIOMI DI CONTINUITÀ: riguardano esclusivamente la retta e permettono di mettere in relazione enti geometrici (i punti) con enti algebrici (i numeri reali).

V.1. (Assioma archimedeo) *Dati comunque due segmenti AB e CD esiste un numero naturale n tale che il trasporto del segmento $C'D' = nCD$, a partire da A e sulla semiretta che contiene B , dà luogo ad un segmento AH che contiene il punto B .*

V.2. (Assioma di completezza) *Non è possibile aggiungere ai punti di una retta euclidea neppure un punto ed estendere simultaneamente le nozioni di ordine e di congruenza in modo che valgano i postulati dei gruppi I, II, III, IV e V.1.*

La formulazione di quest'ultimo assioma non è molto intuitiva, però lo studente che abbia familiarità con i numeri reali si sarà reso conto che V.1 e

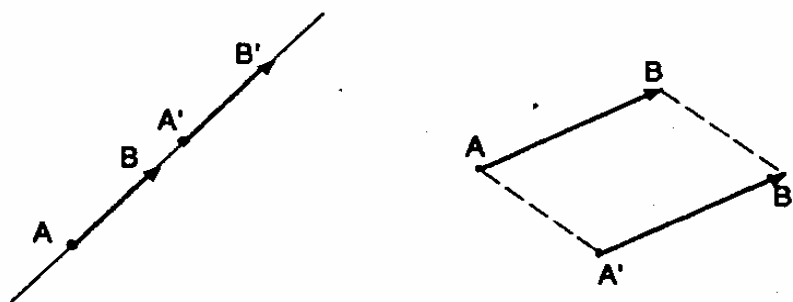
V.2 hanno un analogo algebrico nel campo $\mathbf{R}$ dei numeri reali.

Abbiamo così completato la lista degli assiomi della geometria euclidea. Possiamo quindi chiederci: come si procede a questo punto? Nello stesso modo come faceva Euclide e come vien fatto nella scuola secondaria: si sviluppa la teoria delle proporzioni e la misura dei segmenti, la teoria delle similitudini, quella dell'equivalenza e dell'equiscomponibilità etc., argomenti di cui in parte abbiamo fatto uso in questo testo.

Per esempio abbiamo affermato che, fissati due punti O, U sulla retta r , è possibile porre i punti di r in corrispondenza biunivoca con i numeri reali (cfr. 1.1). Che ad ogni punto P resti associata l'ascissa x è conseguenza della teoria delle proporzioni e della misura dei segmenti, e quindi l'applicazione $r \hookrightarrow \mathbf{R}$ è chiaramente iniettiva. Viceversa, che ad ogni numero reale x si possa associare un punto, deriva dal fatto che i numeri reali sono un campo archimedeo completo e quindi se l'applicazione in esame fosse iniettiva, ma non suriettiva, si potrebbe ampliare i punti di r (aggiungendo i numeri reali che non sono nell'immagine) ed estendere le relazioni di ordine e di congruenza contraddicendo l'assioma V.2.

Per quanto concerne l'algebra lineare, una volta definiti i segmenti orientati di $\mathcal{E}^3$, si può considerare lo spazio $\mathcal{V}_O$ la cui struttura vettoriale fa uso, tra l'altro, della nozione di parallelogramma e dalle sue proprietà (cfr. capitolo 2, sezione 1).

6.6 Vogliamo infine accennare ad un altro modello $\mathcal{V}$ di spazio vettoriale geometrico tridimensionale, i cui elementi sono "vettori liberi". Due segmenti orientati AB ed $A'B'$ si dicono *equipollenti* se appartengono alla



stessa retta e sono congruenti ed equiorientati, oppure se il quadrilatero di vertici A, B, B', A' è un parallelogramma. Si vede subito che la relazione di equipollenza fra segmenti orientati è riflessiva, simmetrica e transitiva. Questo permette di ripartire l'insieme dei segmenti orientati in *classi di equivalenza* (insieme quoziente); ciascuna classe contiene tutti i segmenti fra loro equipollenti ed equipollenti ad uno dato e prende il nome di *vettore geometrico libero*. È chiara l'origine del nome, il vettore non è più un segmento orientato di primo estremo fissato, come in $\mathcal{V}_O$, ma è libero di essere rappresentato da un segmento orientato avente primo estremo in un

punto qualunque dello spazio. Le operazioni sono definite sostanzialmente come in $\mathcal{V}_O$ ed è immediato che si ha un'applicazione biunivoca $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_O$ che conserva le operazioni. Lo spazio $\mathcal{V}_O$ rappresenta meglio la realtà fisica delle forze, delle velocità, accelerazioni, etc.; $\mathcal{V}$ è più astratto ma legato alla "struttura affine" dello spazio $\mathcal{E}^3$. Infatti abbiamo un'applicazione:

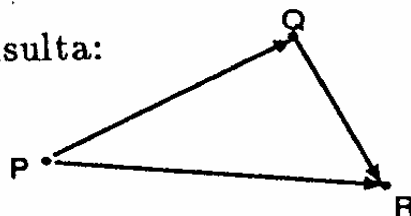
$$\phi : \mathcal{E}^3 \times \mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$$

che associa ad ogni coppia ordinata di punti P, Q di $\mathcal{E}^3$ il vettore $\mathbf{v} = \phi(P, Q)$ di $\mathcal{V}$ costituito dalla classe di equipollenza del segmento orientato di estremi P e Q . Tale applicazione gode delle seguenti proprietà:

1. Per ogni punto $P \in \mathcal{E}^3$ e per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esiste un'unico punto Q tale che $\phi(P, Q) = \mathbf{v}$.

2. Per ogni terna di punti $P, Q, R \in \mathcal{E}^3$ risulta:

$$\phi(P, Q) + \phi(Q, R) = \phi(P, R).$$



In particolare da 1 segue che ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ determina un'applicazione biunivoca $\tau_{\mathbf{v}} : \mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{E}^3$, detta *traslazione*. Quindi $\mathcal{V}$ può essere interpretato come il "gruppo delle traslazioni" dello spazio $\mathcal{E}^3$.

Generalizzando quanto ora visto relativamente all'insieme $\mathcal{E}^3$ ed allo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ si riesce ad introdurre la nozione di "spazio affine" di dimensione n .

7. ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

ESERCIZIO I

1. Si consideri, al variare del parametro reale t , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z .

$$4x + 4z = 1$$

$$4x + (1+t)y + (5+t)z = 1$$

$$ty + (1+t)z = 0.$$

Discutere, al variare del parametro t , se esso è compatibile e, in caso affermativo, determinare la dimensione della sottovarietà V_t corrispondente.

2. Spazio affine ordinario, riferimento $RA(O, x, y, z)$. Sia r la retta congiungente i punti $P = (2, 1, 0)$, $Q = (1, -2, 1)$. Determinare, se

esiste, una retta s che sia incidente ad r , passi per O e sia parallela simultaneamente ai piani α e β di equazioni rispettivamente $2x - y + z - 1 = 0$ e $x - 2y - 5z + 2 = 0$.

3. Si considerino in $\mathbb{R}^5$ i seguenti vettori:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Determinare, equazioni cartesiane e precisare la dimensione del sottospazio $U = \text{Span}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. Dire se il vettore u appartiene o meno ad U .

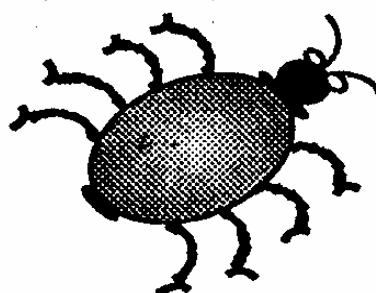
ESERCIZIO II

1. Spazio affine ordinario, riferimento $RA(O, x, y, z)$. Date le rette: r di equazioni $x - y + z - 3 = 0$, $x + 2z - 1 = 0$, s di equazioni $x = 1 + 2t$, $y = -3 + t$, $z = 1 - t$, p di equazioni $x = 1$, $y + 3 = 1 - z$, dimostrare che esse sono complanari e determinare un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$: U di equazione $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ e $W = \text{Span}(w_1, w_2, w_3)$; determinare una base per $U \cap W$:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Siano s, t, u, v quattro vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti. Provare che i vettori $s, s + 2t, s + t + u, s + t + u + 2v$ sono anch'essi linearmente indipendenti.



Ora e' anche colpa mia !
La vedremo !!!

Capitolo 5

TRASFORMAZIONI LINEARI

INTRODUZIONE In questo capitolo viene sviluppata la teoria delle "trasformazioni lineari" fra spazi vettoriali di dimensione finita. Inizialmente si mette in evidenza come ad una matrice si possa associare una trasformazione lineare fra spazi vettoriali numerici, se ne studiano i sottospazi "nucleo" ed "immagine" e le relative dimensioni.

Per spazi vettoriali qualunque basta fissare basi per ricondursi al caso precedente. Occorre però studiare il problema dei cambiamenti di base. In particolare per gli "endomorfismi" questo dà luogo alla nozione di matrici "coniugate" di cui si studiano alcuni "invarianti".

1. TRASFORMAZIONE LINEARE ASSOCIATA AD UNA MATRICE

Abbiamo introdotto le matrici $m \times n$ come tabelle di numeri naturalmente associate a sistemi lineari. Vi sono però altri modi di far uso di una matrice. Vogliamo ora illustrarne uno molto importante e vederne il collegamento con la teoria dei sistemi lineari che abbiamo sviluppata nel capitolo 1.

Partiamo dal seguente:

1.1 ESEMPIO. Sia data la matrice 3×4 :

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

e consideriamo gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$. Possiamo ora costruire un'applicazione $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ad ogni vettore $x \in \mathbb{R}^4$ associa il vettore di $\mathbb{R}^3$ ottenuto dal prodotto Ax della matrice A per il vettore x . Così,

ad esempio, questa applicazione associa al vettore $x \in \mathbb{R}^4$ di componenti $0, -1, 2, 2$ il vettore:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

In particolare l'applicazione associa al vettore e_1 (di componenti $1, 0, 0, 0$) il primo vettore colonna della matrice A ; similmente ai vettori e_2, e_3, e_4 di $\mathbb{R}^4$ corrispondono rispettivamente il secondo, il terzo, il quarto vettore colonna di A .

Questa applicazione è "lineare" nel senso che se indichiamo con x_1, x_2, x_3, x_4 le componenti del vettore x variabile in $\mathbb{R}^4$, le componenti y_1, y_2, y_3 del vettore y corrispondente ad x in $\mathbb{R}^3$ sono date da:

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}, \quad \text{cioè} \quad \begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - x_2 + 4x_4 \\ y_2 &= x_1 + x_3 + 2x_4 \\ y_3 &= -2x_2 + 2x_3 + x_4 \end{aligned}$$

esse sono quindi funzioni lineari delle coordinate di x , cioè polinomi omogenei di primo grado in $x_1, \dots, x_4$.

A questo punto molte domande sorgono spontanee:

- α) quale relazione c'è fra la linearità, così come l'abbiamo spiegata, e le operazioni che vi sono nei due spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$?
- β) Quali sono i vettori che si ottengono in $\mathbb{R}^3$ come risultato di questa applicazione?
- γ) Esistono vettori di $\mathbb{R}^4$ che hanno come corrispondente il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$?

Daremo risposte complete a queste domande dopo aver trattato il caso generale. ♡

Sia A una matrice $m \times n$; per mettere in evidenza l'importanza, in quanto segue, del numero delle righe e delle colonne di A scriveremo anche $A = A_{mn}$. Partendo da essa *definiamo* la seguente *trasformazione lineare* (ancora indicata con il simbolo della matrice):

$$(1.2) \quad A_{mn} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

che ad ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ associa il vettore $y = Ax$ ($\in \mathbb{R}^m$) dato dal prodotto della matrice A per il vettore x .

In particolare si noti che i vettori colonna $a^1, a^2, \dots, a^n$ della matrice A sono i corrispondenti rispettivamente dei vettori $e^1, e^2, \dots, e^n$, cioè della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Infatti $Ae^1 = a^1, \dots, Ae^n = a^n$.

Tale applicazione è *lineare* nel senso che “muta le operazioni dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ nelle operazioni dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$ ”; si hanno infatti le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} a) \quad & A(x + x') = Ax + Ax', & \forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \\ b) \quad & A(\alpha x) = \alpha(Ax), & \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si noti che nel primo membro di a) prima si effettua l'operazione di somma in $\mathbb{R}^n$ e poi si usa la trasformazione, cioè il prodotto per la matrice A ; nel secondo membro prima si effettua la trasformazione e poi si sommano i risultati in $\mathbb{R}^m$. Nel primo membro di b) prima si effettua la moltiplicazione per lo scalare α in $\mathbb{R}^n$ e poi si effettua la trasformazione; nel secondo membro prima si effettua la trasformazione e poi si moltiplica per lo scalare α in $\mathbb{R}^m$. È questo il senso della frase “la trasformazione muta le operazioni di $\mathbb{R}^n$ in quelle di $\mathbb{R}^m$ ”.

Le formule a) e b) che abbiamo scritte sono già note allo studente, esse sono state infatti viste nella 5.6 del capitolo 1, dove abbiamo parlato del prodotto fra matrici. Esse possono anche essere riviste come conseguenza del fatto che la relazione vettoriale $y = Ax$, che definisce l'applicazione, si scrive con equazioni che danno le coordinate $y_1, y_2, \dots, y_m$ del vettore y , corrispondente di x , come *funzioni lineari* delle coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ del vettore x stesso:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

È chiaro che se in queste equazioni di primo grado si sostituiscono le coordinate di x con quelle della somma $x + x'$, o con quelle di αx , usando la proprietà distributiva ed associativa fra numeri reali si ottengono rispettivamente $y + y'$ e αy .

Quanto ora visto permette di rispondere alla domanda a) posta per l'esempio 1.1. Fra breve daremo risposta anche alle altre domande poste.

All'applicazione lineare $A_{mn} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definita dalla matrice A di tipo $m \times n$, restano associati *quattro sottospazi vettoriali*, due in $\mathbb{R}^n$ e due in $\mathbb{R}^m$ che passiamo a definire.

1.4 Definizione. Alla trasformazione lineare $A_{mn} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ restano associati i seguenti sottospazi:

$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$, detto il nucleo o spazio nullo di A

$\text{Im}(A) = \text{Span}(a^1, \dots, a^n) \subseteq \mathbb{R}^m$, detto immagine, o spazio generato dai vettori colonna di A ;

$\text{Im}(A^T) = \text{Span}(a_1, \dots, a_m) \subseteq \mathbb{R}^n$, detto spazio generato dai vettori riga di A ;

$\ker(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$, detto spazio nullo a sinistra di A . ♣

$\text{Im}(A)$ ed $\text{Im}(A^T)$ sono sottospazi per la 4.12 del capitolo 1; $\ker(A)$, ed analogamente $\ker(A^T)$, è un sottospazio in quanto è l'insieme dei vettori soluzione di un sistema omogeneo (cfr. 5.18 del capitolo 1).

1.5 OSSERVAZIONE. Notiamo che abbiamo chiamato $\ker(A)$ lo *spazio nullo* di A in quanto esso è costituito da tutti e soli quei vettori dello "spazio di partenza" $\mathbb{R}^n$ che vengono "annullati" dalla matrice; $\ker$ viene dall'inglese *kernel* che vuol dire nucleo.

$\ker(A^T)$ è detto *spazio nullo a sinistra* di A in quanto la relazione $A^T y = 0$ può essere riscritta $y^T A = 0$, basta infatti tener conto che $(A^T y)^T = 0^T = 0$ ed usare le proprietà 2.9, capitolo 3, sulla trasposizione delle matrici; quindi gli elementi di questo sottoinsieme sono tutti e soli i vettori dello "spazio di arrivo" $\mathbb{R}^m$ che, scritti come vettori riga e posti a sinistra della matrice A , sono da essa annullati.

$\text{Im}(A)$ è per definizione costituito dai vettori $y \in \mathbb{R}^m$ che sono combinazione lineare dei vettori colonna di A : $y = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = Ax$, dove x è il vettore che ha come componenti i pesi della combinazione lineare. In definitiva abbiamo che:

$$\text{Im}(A) = \text{Span}(a^1, a^2, \dots, a^n) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ per il quale } Ax = y\}.$$

Si tratta quindi di quei vettori dello spazio di arrivo $\mathbb{R}^m$ che provengono da qualche vettore dello spazio di partenza $\mathbb{R}^n$ e pertanto costituiscono "l'immagine" dell'applicazione determinata da A . Im sta quindi ad indicare la parola inglese "image" o anche quella italiana "immagine".

In modo analogo $\text{Im}(A^T)$ è lo spazio generato dalle colonne di A^T , cioè dalle righe di A . ♡

Il problema che vogliamo ora risolvere è quello di determinare la *dimensione* di ciascuno dei quattro sottospazi. Basta a tal scopo determinare una base per ciascuno di essi (cfr. 2.7, capitolo 2).

1.6 Proposizione. Sia A una matrice $m \times n$ di rango r , allora:

- i) $\dim(\ker(A)) = n - r$,
- ii) $\dim(\operatorname{Im}(A)) = r$,
- iii) $\dim(\operatorname{Im}(A^T)) = r$,
- iv) $\dim(\ker(A^T)) = m - r$.

Dim. i) Effettuiamo una eliminazione di Gauss su $Ax = 0$. Facendo uso della (5.17') del capitolo 1 abbiamo che $\ker(A)$ è il sottospazio generato dagli $n-r$ vettori numerici v_k , essi sono quindi un sistema di generatori per $\ker(A)$. Di fatto sono anche una *base* poiché sono linearmente indipendenti. Infatti, godendo essi della proprietà di avere la coordinata k^{ma} uguale ad 1 e le coordinate sottostanti nulle, riscritte le coordinate di ciascuno di essi in modo "opportuno", essi corrispondono alle righe di una matrice a scala di tipo $(n-r) \times n$ e di rango $n-r$. I vettori sono pertanto indipendenti (cfr. a) di 4.2, capitolo 2). Il modo opportuno di disporre i vettori v_k per ottenere una matrice a scala lo illustreremo fra breve nell'esempio 1.7. Per provare ii) applichiamo ai vettori colonna della matrice A in questione, la proposizione 4.4 del capitolo 2; in essa è indicata una scelta della *base* che è costituita da r elementi, dove $r = \operatorname{rg}(A)$ e quindi l'affermazione è provata. iii) è conseguenza immediata della proposizione 4.3 del capitolo 2. Infine iv) è immediata visto che A^T ha m colonne e rango r (cfr. 2.9, capitolo 3), basta quindi applicare ad essa l'affermazione di i). ♣

1.7 ESEMPIO. Riprendiamo il sistema omogeneo discusso nell'esempio 5.16 del capitolo 1, dove abbiamo trovato come generatori dello spazio nullo i vettori:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La dipendenza o indipendenza lineare non dipende né dall'ordine con cui si prendono i vettori, né dall'ordine con cui si prendono le coordinate dei vettori, né dallo scrivere i vettori come vettori colonna o come vettori riga (perché?). Scriviamo i vettori come vettori riga, prendendo nell'ordine v_6, v_4, v_2 ed ordinando le coordinate dall'ultima verso la prima. Si ottiene la matrice a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel corso della dimostrazione di 1.6 abbiamo messo in evidenza come si possa ottenere una *base* per i sottospazi $\ker(A)$, $\operatorname{Im}(A)$, $\operatorname{Im}(A^T)$;

per ottenere una base per $\ker(A^T)$ possiamo certamente applicare il procedimento indicato in i) con riferimento ad A^T , ma questo prevede di fare il procedimento di eliminazione di Gauss sulla matrice A^T .

1.E Esercizi

1. Si consideri l'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data dalla seguente matrice A e si determini una base per ciascuno dei quattro sottospazi ad essa associati:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Si consideri l'applicazione lineare $A_t : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, al variare del parametro t ; trovare, se esistono, valori del parametro t per i quali $\dim(\ker(A_t)) = 2$:

$$A_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ t & t^3 & 1+t & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Si consideri l'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice A ; determinare basi e le dimensioni per i sottospazi $\ker(A)$ ed $\text{Im}(A)$, e vedere se il vettore $\mathbf{v}$ appartiene ad $\text{Im}(A)$:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

4. Si consideri la trasformazione lineare $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita dalle equazioni: $x' = x - 2y - z$, $y' = x + y + z$. Scrivere la matrice A di tale trasformazione e determinare basi per i quattro sottospazi ad essa associati.

2. TRASFORMAZIONI LINEARI INIETTIVE, SURIETTIVE E BIETTIVE

Richiamiamo brevemente alcune nozioni che riguardano gli insiemi e che certamente (?) sono ben note allo studente.

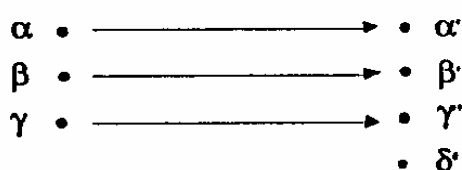
Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione fra insiemi la quale associ ad ogni $x \in X$ l'elemento $y = f(x) \in Y$. Si hanno le seguenti:

2.1 Definizioni.

- a) Si chiama immagine di f , ovvero immagine di X tramite f , l'insieme $Im(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ per qualche } x \in X\}$.
- b) Si chiama immagine inversa (o controimmagine) di un elemento $y \in Y$ l'insieme $Im_f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Tale insieme è non vuoto se e solo se $y \in Im(f)$.
- c) f si dice iniettiva (o biunivoca sull'immagine) se per ogni coppia di elementi distinti $x, x' \in X$ risulta $f(x) \neq f(x')$ (e quindi se $Im_f^{-1}(y)$ è costituita da un solo elemento per ogni $y \in Im(f)$);
 si dice suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste un $x \in X$ tale che $y = f(x)$, (e quindi se $Im(f) = Y$);
 si dice biiettiva (o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva. ♣

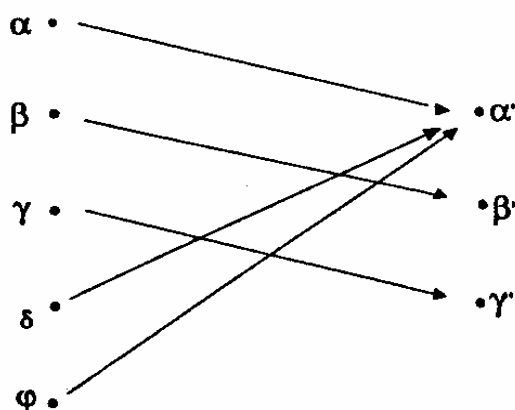
Negli esempi che seguono sono illustrate le definizioni date nel caso che X ed Y siano insiemi finiti:

2.2 ESEMPIO. Sia $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $Y = \{\alpha', \beta', \gamma', \delta'\}$ ed f l'applicazione descritta dalle frecce:



► $Im(f) = \{\alpha', \beta', \gamma'\}$, quindi l'applicazione non è suriettiva. D'altra parte le immagini inverse di α', β', γ' sono rispettivamente α, β, γ e quindi l'applicazione è iniettiva. Essa è biunivoca sull'immagine. ♥

► 2.3 ESEMPIO. Sia $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi\}$, $Y = \{\alpha', \beta', \gamma'\}$ e l'applicazione f definita dalla frecce:



► Si ha $Im(f) = Y$ e quindi l'applicazione è suriettiva. Essa non è iniettiva in quanto $Im_f^{-1}(\alpha') = \{\alpha, \delta, \varphi\}$. ♥

A noi interessa applicare queste nozioni al caso in cui l'applicazione sia una trasformazione lineare.

2.4 Proposizione. *Si consideri l'applicazione lineare:*

$$A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

dove $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ e $\text{rg}(A) = r$.

i) Per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ la controimmagine $\text{Im}_A^{-1}(\mathbf{b})$ è:

- una sottovarietà affine di $\mathbb{R}^n$, di dimensione $n-r$, se $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$;
- l'insieme vuoto se $\mathbf{b} \notin \text{Im}(A)$.

ii) L'applicazione A è:

- iniettiva se e solo se $\text{rg}(A) = n$, ovvero $\ker(A) = \{\mathbf{o}\}$,
- suriettiva se e solo se $\text{rg}(A) = m$, ovvero $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$,
- biunivoca (invertibile) se e solo se A è quadrata e di rango massimo.

Dim. i) Per definizione $\text{Im}_A^{-1}(\mathbf{b}) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid A\xi = \mathbf{b}\}$ e quindi è non vuota se e solo se il sistema $Ax = \mathbf{b}$ è compatibile, ovvero e solo se $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$. In particolare $\text{Im}_A^{-1}(\mathbf{o}) = \ker(A)$ è un sottospazio di dimensione $n-r$. Dal teorema di struttura delle soluzioni di un sistema abbiamo:

$$\text{Im}_A^{-1}(\mathbf{b}) = \ker(A) + \xi_0,$$

e quindi la tesi. Per ii) si osservi che A è iniettiva se e solo se per ogni $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$, $\text{Im}_A^{-1}(\mathbf{b})$, è costituita da un solo elemento, cioè una sottovarietà affine di dimensione 0, quindi $n-r=0$; essa è suriettiva se e solo se $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$, quindi $\dim(\text{Im}(A)) = \text{rg}(A) = m$. Nel caso biunivoco queste due condizioni devono valere simultaneamente; A è invertibile ed A^{-1} determina l'applicazione inversa. ♣

2.E Esercizi

1. Si consideri l'applicazione lineare assegnata nell'esercizio 1 della sezione 1.E. Vedere se tale applicazione è suriettiva e calcolare l'immagine inversa del vettore di componenti $-1, 0, 3$.

2. Si consideri l'applicazione lineare, dipendente dal parametro reale t , definita nell'esercizio 2 della sezione 1.E. Vedere se esistono valori del parametro per cui l'applicazione è suriettiva e/o iniettiva.

3. Si consideri l'applicazione lineare di matrice $B = A^T$, dove A è data nell'esercizio 3 della sezione 1.E. Dire se essa è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

3. CAMBIAMENTI DI BASE PER UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE FINITA

Supponiamo che V sia uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $K(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ e sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ una sua base fissata. Ricordiamo che ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione dei vettori di base: $\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$ e ad esso resta associato il vettore numerico $\mathbf{x} \in K^n$, di componenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ (cfr. 3.3 del capitolo 2). Abbiamo così posto una corrispondenza:

$$\begin{array}{ccc} V & & V \\ \downarrow & \text{ovvero} & \downarrow \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{C}^n \end{array}$$

fra V ed uno spazio vettoriale numerico, la quale è biunivoca e conserva le operazioni; si tratta di un "isomorfismo", come vedremo più in generale nella sezione 4. Questo fornisce la possibilità di sostituire ai vettori "astratti" di V vettori numerici e quindi permette di verificare su questi ultimi eventuali relazioni di dipendenza o indipendenza lineare.

3.1 ESERCIZIO. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio dei polinomi di grado ≤ 3 e a coefficienti reali. Verificare che i polinomi $q_0 = x^3$, $q_1 = 1 - x$, $q_2 = 1 + x$, $q_3 = x(1 - x)$ sono una base.

Poiché $\mathbb{R}_3[x]$ ha una base canonica costituita dai polinomi $1, x, x^2, x^3$ esso ha dimensione 4. Occorre quindi provare che i polinomi $q_0, \dots, q_3$ sono indipendenti. Nella base canonica essi hanno coordinate rispettivamente:

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

e la loro indipendenza può essere verificata in $\mathbb{R}^4$ calcolando il rango della matrice A che li ammette come vettori riga (o colonna), ovvero provando che $\det(A) \neq 0$. Quest'ultimo metodo sembra il più rapido data la presenza di numerosi zeri nelle coordinate dei vettori. Si ottiene $\det(A) = 2$. $\heartsuit$

Supponiamo di effettuare un *cambiamento di base* in V e quindi di passare dalla "prima" base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, rispetto alla quale le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ variabile in V sono indicate con $x_1, x_2, \dots, x_n$, ad una "seconda" base $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n$ rispetto alla quale le coordinate di $\mathbf{v}$ sono indicate con $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$. Il problema che vogliamo risolvere è quello di determinare le *relazioni* che intercorrono fra i due tipi di coordinate di uno stesso vettore rispetto alle due basi. Osserviamo innanzi tutto che è possibile scrivere i vettori $\mathbf{v}'_i$ della nuova base in funzione della vecchia; le

formule sono del tipo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_1 &= c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{1n}\mathbf{v}_n \\
 \mathbf{v}'_2 &= c_{21}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{2n}\mathbf{v}_n \\
 &\vdots \\
 \mathbf{v}'_n &= c_{n1}\mathbf{v}_1 + c_{n2}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{nn}\mathbf{v}_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

La matrice $C = (c_{ij})$, che ha come *vettori riga* le coordinate dei nuovi vettori di base rispetto a quelli vecchi, è *non singolare* e quindi invertibile; infatti nell'identificazione $V \rightarrow \mathbb{K}^n$ fatta tramite la base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ i vettori $\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n$ corrispondono ai vettori riga di C .

Sia $\mathbf{v} \in V$; per esso abbiamo l'uguaglianza:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = x'_1\mathbf{v}'_1 + x'_2\mathbf{v}'_2 + \cdots + x'_n\mathbf{v}'_n \\
 &= x'_1(c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{1n}\mathbf{v}_n) \\
 &\quad + x'_2(c_{21}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{2n}\mathbf{v}_n) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + x'_n(c_{n1}\mathbf{v}_1 + c_{n2}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{nn}\mathbf{v}_n) \\
 &= (c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2 + \cdots + c_{n1}x'_n)\mathbf{v}_1 \\
 &\quad + (c_{12}x'_1 + c_{22}x'_2 + \cdots + c_{n2}x'_n)\mathbf{v}_2 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + (c_{1n}x'_1 + c_{2n}x'_2 + \cdots + c_{nn}x'_n)\mathbf{v}_n.
 \end{aligned}$$

Il vettore $\mathbf{v}$ è ora scritto nella stessa base ed in due modi diversi; ma le coordinate in una base sono uniche pertanto devono valere le uguaglianze:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2 + \cdots + c_{n1}x'_n \\
 x_2 &= c_{12}x'_1 + c_{22}x'_2 + \cdots + c_{n2}x'_n \\
 &\vdots \\
 x_n &= c_{1n}x'_1 + c_{2n}x'_2 + \cdots + c_{nn}x'_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Le formule (3.3) forniscono le coordinate nella prima base come funzioni *lineari omogenee invertibili* delle coordinate nella seconda base, esse fanno inoltre uso della *matrice trasposta* della matrice C che esprime i vettori della seconda base in funzione della prima. Le (3.2) e (3.3)

possono essere riscritte in forma matriciale assieme alle loro inverse nel modo seguente:

$$(3.4) \quad \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{la matrice contiene per righe le coordinate dei vettori della seconda base rispetto alla prima,}$$

$$(3.5) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad \text{la matrice contiene per colonne le coordinate dei vettori della seconda base rispetto alla prima,}$$

$$(3.6) \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} \quad \text{la matrice contiene per righe le coordinate dei vettori della prima base rispetto alla seconda,}$$

$$(3.7) \quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = (C^T)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{la matrice contiene per colonne le coordinate dei vettori della prima base rispetto alla seconda.}$$

Lo studente avrà notato che abbiamo scritto non solo matrici numeriche ad n righe ed una colonna, ma anche matrici di vettori; è chiaro che il prodotto va eseguito con le solite regole.

È chiaro anche che una qualunque delle formule (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) determina le altre tramite le relazioni che intercorrono fra le matrici delle trasformazioni indicate e che abbiamo scritto esplicitamente.

3.8 ESERCIZIO. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e di base v_1, v_2, v_3 rispetto alla quale le coordinate sono indicate con x_1, x_2, x_3 . Si indichino con x'_1, x'_2, x'_3 le coordinate rispetto ad una nuova base v'_1, v'_2, v'_3 .

a) Determinare i nuovi vettori di base sapendo che per le coordinate valgono le relazioni: $x'_1 = 2x_2 - x_3$, $x'_2 = x_1 + x_2$, $x'_3 = x_1$.

b) Scrivere il vettore $v = 3v_1 + v_3$ nella nuova base e determinarne le coordinate.

Le formule date rappresentano effettivamente un cambiamento di coordinate del tipo (3.7) in quanto la matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

è non singolare ($\det(A) = 1$). Usando la matrice trasposta otteniamo il cambiamento di base del tipo (3.6):

$$v_1 = v'_2 + v'_3, \quad v_2 = 2v'_1 + v'_2, \quad v_3 = -v'_1.$$

Basta ora invertire questo sistema per ottenere il cambiamento di base del tipo (3.4) cioè: $v'_1 = -v_3$, $v'_2 = v_2 + 2v_3$, $v'_3 = v_1 - v_2 - 2v_3$.

Abbiamo così trovato la risposta al punto a). Per il punto b) possiamo sostituire: $v = 3v_1 + v_3 = 3(v'_2 + v'_3) - v'_1 = -v'_1 + 3v'_2 + 3v'_3$

e le coordinate richieste sono $-1, 3, 3$.

♡

3.E Esercizi

1. Nello spazio vettoriale V si indichino con x, y, z le coordinate rispetto alla base v_1, v_2, v_3 . È possibile interpretare la trasformazione lineare omogenea:

$$x = 2x' - y', \quad y = x' + y', \quad z = x' + y' - z',$$

come cambiamento di coordinate nel passaggio ad una base v'_1, v'_2, v'_3 ? In caso affermativo individuare le formule che legano fra loro le due basi.

2. Spazio vettoriale V con base assegnata v_1, v_2, v_3 e coordinate relative x_1, x_2, x_3 . Si consideri la terna di vettori $w_1 = 2v_1 - v_2 + v_3$, $w_2 = v_1 - v_3$, $w_3 = 2v_1 + v_2$.

a) Provare che w_1, w_2, w_3 costituiscono una nuova base per V .

b) Scrivere le trasformazioni lineari omogenee che legano le coordinate nella base w_1, w_2, w_3 a quelle della base iniziale.

3. Sia $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$. Provare che V è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$; verificare che, sia le matrici A_1, A_2, A_3 , che le matrici A'_1, A'_2, A'_3 , sono una base per V e determinare le relazioni che intercorrono fra le due basi:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$A'_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad A'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. TRASFORMAZIONI LINEARI E MATRICI ASSOCIATE. ENDOMORFISMI E MATRICI CONIUGATE

Abbiamo già visto esempi di trasformazioni lineari per gli spazi vettoriali numerici del tipo $\mathbf{R}^n$; vogliamo ora generalizzare tale nozione a spazi vettoriali V e W di dimensione finita rispettivamente m ed n , sul campo K ; per semplicità assumiamo $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$. Si pone la seguente definizione:

4.1 Definizione. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita (rispettivamente n ed m) sullo stesso campo K ; una trasformazione lineare (o operatore lineare)

$$T : V \longrightarrow W$$

è un'applicazione che associa ad ogni elemento $\mathbf{v} \in V$ un elemento $T(\mathbf{v}) \in W$ e godente delle seguenti proprietà di linearità:

$$i) \quad T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) \quad \text{per ogni } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V;$$

$$ii) \quad T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v}) \quad \text{per ogni } \lambda \in K \text{ e per ogni } \mathbf{v} \in V. \quad \clubsuit$$

Data una trasformazione lineare $T : V \longrightarrow W$ ad essa restano associati i due sottoinsiemi:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{o}\}, \quad \text{nucleo della trasformazione,}$$

$$\operatorname{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists \mathbf{v} \in V \text{ e } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}, \quad \text{immagine della trasformazione,}$$

che sono sottospazi (verificarlo!) di dimensione finita, visto che sono contenuti in spazi di dimensione finita.

L'applicazione T può essere *iniettiva*, *suriettiva* o *biunivoca* (cfr. sezione 2). In quest'ultimo caso si dice anche che T è un isomorfismo dello spazio vettoriale V sullo spazio vettoriale W .

Un esempio di applicazione lineare che sia un isomorfismo è l'applicazione φ definita nella proposizione 6.10 del capitolo 2.

4.2 ESEMPIO. Sia $S : M_3(\mathbf{R}) \longrightarrow M_3(\mathbf{R})$ la trasformazione che associa ad ogni matrice A la matrice $S(A) = A - A^T$. Essa è una trasformazione lineare. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} S(A + A') &= (A + A') - (A + A')^T = A + A' - A^T - A'^T \\ &= (A - A^T) + (A' - A'^T) = S(A) + S(A'), \end{aligned}$$

$$S(\lambda A) = \lambda A - (\lambda A)^T = \lambda A - A^T \lambda = \lambda A - \lambda A^T = \lambda S(A).$$

In questo caso $\ker(S) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : S(A) = 0\}$ e quindi sono in $\ker(S)$ tutte e sole le matrici A per cui $A - A^T = 0$, cioè le matrici simmetriche. $\text{Im}(S)$ è costituito da tutte e sole le matrici $B \in M_n(\mathbb{R})$ della forma $B = A - A^T$; scrivendo una matrice A generale e calcolando B si vede che quest'ultima è una matrice *antisimmetrica*, cioè una matrice che ha elementi nulli sulla diagonale ($b_{ii} = 0$) ed elementi simmetrici rispetto ad essa sono opposti ($b_{ij} = -b_{ji}$). L'applicazione quindi non è nè iniettiva nè suriettiva. ♡

4.3 Proposizione *Siano V e W spazi vettoriali sul campo K , di dimensioni n ed m rispettivamente. Assegnati arbitrariamente n vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ indipendenti (una base) di V ed assegnati arbitrariamente m vettori $c_1, c_2, \dots, c_m$ di W esiste un'unica trasformazione lineare $T : V \rightarrow W$ tale che:*

$$(4.3') \quad T(v_1) = c_1, T(v_2) = c_2, \dots, T(v_n) = c_n.$$

Dim. Sia $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ un vettore variabile in V ; si tratta di provare che $T(v)$ è determinato dai dati. Infatti, tenuto conto che T deve essere lineare, si ha:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \dots + x_n T(v_n) \\ &= x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n. \end{aligned}$$

Viceversa questa formula definisce certamente una trasformazione lineare. ♣

Vogliamo ora mettere in luce le somiglianze e le differenze con quanto visto nella sezione 1, dove abbiamo parlato di trasformazione lineare associata ad una matrice.

Si ha in proposito la seguente:

4.4 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e base fissata $v_1, v_2, \dots, v_n$, sia W uno spazio vettoriale sullo stesso campo K e di base fissata $w_1, w_2, \dots, w_m$ e sia $T : V \rightarrow W$ una trasformazione lineare assegnata. Ad essa resta associata in modo unico una matrice A di tipo $m \times n$ tale che, se si indicano con $x_1, x_2, \dots, x_n$ le coordinate del vettore v variabile in V nella base assegnata, e con $y_1, y_2, \dots, y_m$ le coordinate di $T(v)$ nella base fissata per W , risulta:*

$$(4.4') \quad y = Ax.$$

Dim. I trasformati, via T , dei vettori della base $v_1, v_2, \dots, v_n$ di V si scrivono in modo *unico* come combinazione lineare dei vettori della base

di W :

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\
 T(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\
 &\vdots \\
 T(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Per linearità abbiamo:

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{v}) &= T(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1T(\mathbf{v}_1) + x_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{v}_n) \\
 &= x_1(a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m) + x_2(a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m) \\
 &\quad + \cdots + x_n(a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m) \\
 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\mathbf{w}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\mathbf{w}_2 \\
 &\quad + \cdots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)\mathbf{w}_m.
 \end{aligned}$$

Le componenti $y_1, y_2, \dots, y_m$ di $T(\mathbf{v})$ rispetto alla base $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ sono uniche e quindi:

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}.$$

La proposizione è così provata. ♣

Osserviamo che la matrice A , che abbiamo costruito, è determinata dalle formule 4.5; essa ha per colonne le coordinate dei vettori $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$, trasformati dei vettori della base fissata nello spazio V (di partenza), rispetto alla base fissata nello spazio W (di arrivo).

I sottospazi $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$ si possono ora determinare come $\ker(A)$ e $\text{Im}(A)$; l'iniettività, suriettività o biunivocità di T si possono verificare facendo uso del rango della matrice A (cfr. 2.4).

In particolare la matrice A della trasformazione (1.2) è relativa alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$.

4.6 ESERCIZIO. Si consideri la trasformazione lineare $T: V \rightarrow W$ definita da $T(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - 3\mathbf{w}_3$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2 - (1/2)\mathbf{w}_3$, dove $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ sono basi rispettivamente in V e W . Scrivere la matrice associata a T

nelle basi scelte e determinare le coordinate del trasformato del vettore $v = -v_1 + (2/3)v_2$.

La matrice della trasformazione è:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & -1/2 \end{vmatrix}.$$

Le coordinate del trasformato di v sono date dal prodotto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & -1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 2/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{vmatrix}.$$

♥

In questo modo abbiamo provato che una trasformazione lineare opera sulle coordinate per moltiplicazione con una opportuna matrice A ; in questo senso quanto abbiamo visto nella sezione 1 è di fatto il caso generale. Occorre però osservare che la matrice A che abbiamo associato alla trasformazione T dipende dalle basi scelte.

Supponiamo ora di fissare la base $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ in V , la base $w'_1, w'_2, \dots, w'_m$ in W e di indicare con $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ e $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$ le corrispondenti coordinate. I due sistemi di coordinate in V e i due sistemi di coordinate in W sono legati rispettivamente da trasformazioni lineari omogenee invertibili del tipo:

$$x = Cx', \quad y = Dy',$$

dove C è una matrice di ordine n , D è una matrice di ordine m ed entrambe sono invertibili (cfr. sezione 3).

Sostituendo in (4.4') abbiamo:

$$Dy' = A(Cx') = ACx'.$$

Moltiplicando a sinistra per D^{-1} si ottiene:

$$y' = D^{-1}ACx'.$$

Poiché nella proposizione 4.4 abbiamo provato l'unicità della matrice associata ad una trasformazione lineare, una volta fissate basi per gli spazi coinvolti, ne segue che la matrice B che rappresenta la trasformazione T nelle basi $v'_1, \dots, v'_n$ e $w'_1, \dots, w'_m$ è data da:

$$(4.7) \quad B = D^{-1}AC.$$

Vogliamo ora esaminare in caso in cui $W = V$.

4.8 Definizione Si chiama endomorfismo una trasformazione lineare:

$$T: V \longrightarrow V.$$



La teoria che abbiamo sviluppato fino ad ora continua a sussistere; occorre solo osservare che essendo lo spazio vettoriale di partenza lo stesso di quello di arrivo si assume per esso un'unica base. La matrice A che resta associata a T rispetto a questa base è ora quadrata di ordine n . Un cambiamento di base porta ad una nuova matrice B data da:

$$(4.9) \quad B = C^{-1}AC,$$

dove la matrice quadrata C è invertibile e le sue colonne sono le coordinate dei vettori della nuova base rispetto alla vecchia.

Due matrici quadrate A e B di ordine n legate dalla relazione (4.9) si dicono coniugate o anche simili.

4.10 Proposizione. Sia $T: V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Ad esso restano associate matrici tutte fra loro coniugate e viceversa.

Dim.* Abbiamo già fatto vedere che le due matrici associate a T in due basi diverse sono fra loro coniugate. Viceversa supponiamo di avere due matrici A e B fra loro coniugate: $B = C^{-1}AC$. Supponiamo che la matrice A rappresenti la trasformazione $T: V \longrightarrow V$ rispetto ad una base fissata $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$; essa opera quindi sulle coordinate $\mathbf{x}$ dei vettori $\mathbf{v}$ di V (nella base fissata) tramite la legge $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, ove $\mathbf{y}$ è il vettore delle coordinate di $T(\mathbf{v})$ nella stessa base. Poiché risulta $A = CBC^{-1}$ abbiamo anche $\mathbf{y} = CBC^{-1}\mathbf{x}$ ovvero $C^{-1}\mathbf{y} = B(C^{-1}\mathbf{x})$. Posto $\mathbf{y}' = C^{-1}\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}' = C^{-1}\mathbf{x}$ abbiamo un nuovo sistema di coordinate con apice (visto che C^{-1} è invertibile) e quindi un cambiamento di base in V (cfr. sezione 3) rispetto alla quale la T si scrive tramite la matrice B . 

4.11 ESERCIZIO. In $\mathbb{R}^4$ si consideri la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, i vettori $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$ e la trasformazione lineare $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{c}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{c}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{c}_3$, $T(\mathbf{v}_4) = \mathbf{c}_4$, dove:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \mathbf{c}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Scrivere la matrice A che rappresenta la trasformazione T nella base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ e la matrice B che la rappresenta nella base canonica.

Per determinare la matrice A si devono esprimere i trasformati della

base v_1, v_2, v_3, v_4 nella base medesima. Essendo noti tali trasformati rispetto alla base canonica basta ricavare e_1, e_2, e_3, e_4 in funzione di v_1, v_2, v_3, v_4 . Invertendo $v_1 = e_1 - e_2, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_4, v_4 = e_2 + e_3$ e sostituendo in: $T(v_1) = c_1, T(v_2) = c_2, T(v_3) = c_3, T(v_4) = c_4$ si ricava:

$$\begin{array}{ll} e_1 = (1/2)v_1 + (1/2)v_2 & T(v_1) = v_2 + v_3 \\ e_2 = -(1/2)v_1 + (1/2)v_2 & T(v_2) = -v_2 + v_4 \\ e_3 = (1/2)v_1 - (1/2)v_2 + v_4 & T(v_3) = v_3 + v_4 \\ e_4 = v_3 & T(v_4) = 1/2(v_1 + v_2) + v_3. \end{array}$$

Quindi:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = C^{-1}AC,$$

dove C è la matrice i cui vettori colonna esprimono le coordinate della base canonica rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4 .

Il calcolo esplicito di B è lasciato allo studente.

Noi vogliamo proporre invece un metodo alternativo che consiste nel calcolare direttamente $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$ in funzione della base canonica, facendo uso della linearità.

$$\begin{aligned} T(e_1) &= 1/2 T(v_1) + 1/2 T(v_2) = 1/2 e_2 + 1/2 e_3 + 1/2 e_4, \\ T(e_2) &= -1/2 T(v_1) + 1/2 T(v_2) = -e_1 - 1/2 e_2 + 1/2 e_3 - 1/2 e_4, \\ T(e_3) &= 1/2 T(v_1) - 1/2 T(v_2) + T(v_4) = 2e_1 + 1/2 e_2 - 1/2 e_3 + 3/2 e_4, \\ T(e_4) &= T(v_3) = e_2 + e_3 + e_4 \end{aligned}$$

La matrice B è data da:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 & 1 \end{vmatrix}.$$

♥

4.12 Definizione. Un endomorfismo $T : V \longrightarrow V$ si dice un automorfismo se è invertibile.

♣

Rispetto ad una base fissata un automorfismo deve quindi necessariamente scriversi con equazioni del tipo:

$$(4.13) \quad y = Ax,$$

base v_1, v_2, v_3, v_4 nella base medesima. Essendo noti tali trasformati rispetto alla base canonica basta ricavare e_1, e_2, e_3, e_4 in funzione di v_1, v_2, v_3, v_4 . Invertendo $v_1 = e_1 - e_2, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_4, v_4 = e_2 + e_3$ e sostituendo in: $T(v_1) = c_1, T(v_2) = c_2, T(v_3) = c_3, T(v_4) = c_4$ si ricava:

$$\begin{array}{ll} e_1 = (1/2)v_1 + (1/2)v_2 & T(v_1) = v_2 + v_3 \\ e_2 = -(1/2)v_1 + (1/2)v_2 & T(v_2) = -v_2 + v_4 \\ e_3 = (1/2)v_1 - (1/2)v_2 + v_4 & T(v_3) = v_3 + v_4 \\ e_4 = v_3 & T(v_4) = 1/2(v_1 + v_2) + v_3. \end{array}$$

Quindi:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = C^{-1}AC,$$

dove C è la matrice i cui vettori colonna esprimono le coordinate della base canonica rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4 .

Il calcolo esplicito di B è lasciato allo studente.

Noi vogliamo proporre invece un metodo alternativo che consiste nel calcolare direttamente $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$ in funzione della base canonica, facendo uso della linearità.

$$\begin{aligned} T(e_1) &= 1/2 T(v_1) + 1/2 T(v_2) = 1/2 e_2 + 1/2 e_3 + 1/2 e_4, \\ T(e_2) &= -1/2 T(v_1) + 1/2 T(v_2) = -e_1 - 1/2 e_2 + 1/2 e_3 - 1/2 e_4, \\ T(e_3) &= 1/2 T(v_1) - 1/2 T(v_2) + T(v_4) = 2e_1 + 1/2 e_2 - 1/2 e_3 + 3/2 e_4, \\ T(e_4) &= T(v_3) = e_2 + e_3 + e_4 \end{aligned}$$

La matrice B è data da:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 & 1 \end{vmatrix}.$$

♥

4.12 Definizione. Un endomorfismo $T : V \longrightarrow V$ si dice un automorfismo se è invertibile.

♣

Rispetto ad una base fissata un automorfismo deve quindi necessariamente scriversi con equazioni del tipo:

$$(4.13) \quad y = Ax,$$

4.15 Proposizione.

- i) $rg(A) = rg(C^{-1}AC)$,
 ii) $det(A) = det(C^{-1}AC)$.

Dim. La i) è conseguenza del fatto che le due matrici rappresentano la stessa trasformazione lineare T ed il rango è la dimensione di $Im(T)$. La ii) deriva dalle proprietà dei determinanti (cfr. 3.5 del capitolo 3). ♣

Altri invarianti per coniugazione verranno messi in evidenza nel capitolo 7. La loro conoscenza è utile per risolvere, per esempio il seguente problema.

4.16 ESERCIZIO. Dire se le seguenti matrici rappresentano lo stesso endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ rispetto a basi diverse:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Se così fosse le due matrici dovrebbero essere coniugate; ma ciò è falso in quanto $det(A) = 0$ $det(B) = 1$. ♥

4.E Esercizi

1. Si interpretino $x' = 2x - y$, $y' = x + y$, $z' = x + y + z$ come equazioni di una trasformazione lineare $T: V \rightarrow V$ nella base v_1, v_2, v_3 . Determinare $\ker(T)$, $Im(T)$ e le rispettive dimensioni; trovare il trasformato $T(v)$ del vettore $v = 3v_1 - v_2 + v_3$.

2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base v_1, v_2, v_3 , rispetto alla quale i vettori hanno coordinate x, y, z e sia $T: V \rightarrow V$ l'endomorfismo dato da $T(v_1) = 2v_1 - v_2$, $T(v_2) = v_1 + v_3$, $T(v_3) = v_1 - v_3$. Scrivere la matrice A di T nella base assegnata e decidere se T è un automorfismo. Determinare la matrice B di T nella base v'_1, v'_2, v'_3 sapendo che la corrispondente trasformazione di coordinate in V è data da:

$$x' = x - y, \quad y' = y - z, \quad z' = z.$$

3. Sia v_1, v_2, v_3 una base di V in cui i vettori hanno coordinate x_1, x_2, x_3 e si considerino le formule $y_1 = x_1 - x_2 + 4x_3$, $y_2 = x_1 + 2x_2 - 5x_3$, $y_3 = 2x_1 + x_2 - x_3$.

- Dire se esse si possono interpretare come un cambiamento di coordinate in V rispetto ad una nuova base v'_1, v'_2, v'_3 .

- Dire se esse si possono interpretare come definenti un endomorfismo $T : V \longrightarrow V$. In caso affermativo vedere se $w = -v_1 + v_2 + v_3$ appartiene ad $Im(T)$.

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:

$$v_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{vmatrix}, \quad v_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad v_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{vmatrix}$$

dove t è un parametro variabile in $\mathbb{R}$. Si consideri quindi l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = v_2$, $f(e_3) = v_3$. Esistono valori del parametro t per i quali l'applicazione è invertibile? In caso affermativo determinare la matrice che rappresenta l'applicazione inversa rispetto alla base canonica.

5. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori:

$$a_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad b_1 = \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \begin{vmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare che agisce sulla base a_1, a_2, a_3 nel modo seguente: $F(a_1) = b_1$, $F(a_2) = b_2$, $F(a_3) = b_3$. Scrivere la matrice di F nella base nella base canonica e determinare $Im(F)$.

6. Calcolare $B^{-1}AB$, dove:

$$A = \begin{vmatrix} -66 & 190 & 68 \\ -4 & 13 & 4 \\ -53 & 148 & 55 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{vmatrix}.$$

5. ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

ESERCIZIO I

1. Si considerino la retta r di equazioni $z = 1$, $x + 2y = 2$ e la retta s di equazioni $x = t$, $y = 2t$, $z = 1 - t$. Determinare, se possibile, i punti $R \in r$ ed $S \in s$ in modo tale che la retta passante per R ed S sia parallela alla retta p di equazioni $2x + y + z - 1 = 0$, $y + z = 0$.

2. Sia $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la trasformazione definita da $T(X) = X + X^T$, per ogni $X \in M_2(\mathbb{R})$.

- Provare che tale trasformazione è lineare;
- calcolare la matrice A di T nella base canonica;

$$e_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad e_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad e_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad e_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si indichino con x, y, z le componenti dei vettori. Dire se il sottoinsieme definito dall'equazione a) oppure b) oppure c) è un sottospazio:

$$a) \quad x = 2; \quad b) \quad y = 0; \quad c) \quad x^2 - y = 0.$$

ESERCIZIO II

1. Si consideri la matrice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b & -1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix}$$

dove a e b sono parametri reali, e la si interpreti come operatore $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ (rispetto alla base canonica). Determinare $rg(A)$ al variare di a e b . Trovare basi per $\ker(A)$ ed $Im(A)$ nel caso in cui $rg(A) = 2$.

2. Decidere se esistono due sottospazi U e W di dimensione 3, di uno spazio vettoriale V di dimensione 4, la cui intersezione abbia dimensione:

$$\begin{array}{lll} a) \dim(U \cap W) = 0, & b) \dim(U \cap W) = 1, & c) \dim(U \cap W) = 2, \\ d) \dim(U \cap W) = 3, & e) \dim(U \cap W) = 4. \end{array}$$

3. Sia α il piano di equazione $x - 3y + z - 1 = 0$ e P_0 il suo punto di intersezione con la retta r di equazioni $x = t, y = -3t, z = 1 - t$. Scrivere equazioni per il fascio di rette del piano α di centro P_0 che facciano figurare un parametro non omogeneo.

ESERCIZIO III

1. Determinare per quali valori del parametro reale t il seguente sistema è compatibile e determinare la dimensione della corrispondente sottovarietà affine:

$$\begin{aligned} x_2 + (t + 5)x_3 &= 1 \\ tx_1 + 2tx_2 + 2x_3 &= t^2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= t. \end{aligned}$$

2. Si consideri la trasformazione $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ definita da $T(X) = XC$ al variare di $X \in M_2(\mathbb{R})$; provare che essa è lineare, scriverne la matrice nella base canonica e calcolarne l'immagine:

$$C = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}.$$

3. Spazio affine, riferimento cartesiano $RA(O, x, y, z)$. Si considerino la retta r di equazioni $x - y = y + 1 = 0$, la retta s di equazioni $x - y - 1 = x - z = 0$ e la retta t di equazioni $z - y + 1 = x + y - z + 1 = 0$. Determinare la loro posizione reciproca.

ESERCIZIO IV

1. Nello spazio vettoriale V di dimensione 4 su $\mathbb{R}$ siano u_1 e u_2 vettori indipendenti che generano il sottospazio U . Determinare, se esiste, un sottospazio W tale che $V = U \oplus W$.

2. Sia $W \subset \mathbb{R}^2$ il sottospazio di equazione $x - 3y = 0$. Determinare, se esistono, le trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tali che $\ker(T) = W$.

3. Nello spazio euclideo, in cui è fissato un riferimento $RA(O, x, y, z)$, si consideri la retta r di equazioni parametriche $x = 2t - 5$, $y = 3t - 5$, $z = t$, la retta s di equazioni cartesiane $x - y + z = 0$, $y - 3z - 2 = 0$, ed il punto $P = (1, 1, 0)$. Determinare, se esistono, le rette che passano per P e sono incidenti sia ad r che ad s .



Capitolo 6

GEOMETRIA EUCLIDEA

INTRODUZIONE. Lo studio analitico della geometria elementare dello spazio e del piano, che nel capitolo 4 è stata sviluppata nei suoi aspetti affini, viene ora ripreso dal punto di vista metrico (euclideo) facendo uso delle nozioni di distanza e di misura degli angoli. Queste permettono di introdurre nello spazio dei vettori geometrici un "prodotto scalare" tramite il quale lo spazio V_0 acquista una struttura vettoriale "euclidea". Da essa deduciamo il "prodotto scalare canonico" in $\mathbb{R}^3$ il quale verrà generalizzato ad $\mathbb{R}^n$ nel capitolo 8. Viene quindi introdotto il procedimento di "ortonormalizzazione" di Gram-Schmidt e l'operazione di prodotto vettoriale.

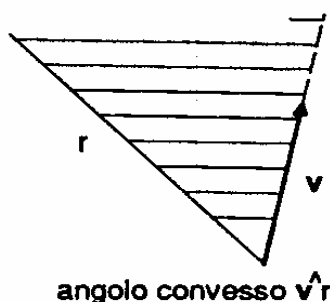
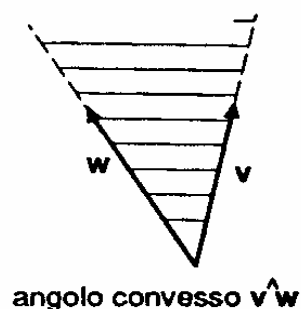
Successivamente vengono dedotte le espressioni analitiche che forniscono misure angolari e distanze nello spazio ordinario. Da ultimo cominciamo a discutere dal punto di vista analitico alcune curve e superfici speciali definite da proprietà geometriche legate alla distanza: circonferenza, ellisse, iperbole, parabola, sfera, cilindro circolare retto, ellissoide etc..

1. PRODOTTO SCALARE NELLO SPAZIO V_0 DEI VETTORI GEOMETRICI

Nel capitolo 4 non abbiamo sfruttato tutte le proprietà dello spazio ordinario, noto allo studente dalla scuola secondaria. Abbiamo di fatto tradotto analiticamente solo proprietà di appartenenza e di parallelismo. In questa sezione faremo uso anche delle "proprietà metriche", cioè di quelle proprietà che sono basate sulla nozione di distanza e di angolo (cfr. sezione 6 del capitolo 4). Nello spazio (o nel piano) euclideo misureremo quindi tutti i segmenti rispetto alla stessa unità di misura, inoltre la misura degli angoli verrà sempre espressa in *radianti*.

Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ fissiamo un punto O e ricordiamo che due vettori $v, w \in V_0$, ovvero due semirette con la stessa origine, individuano due angoli uno dei quali è *convesso*, cioè non contiene il prolungamento dei

suoi lati oppure è l'angolo piatto. D'ora in poi come *angolo di due vettori* (o di due semirette) assumeremo l'*angolo convesso* da essi individuato.



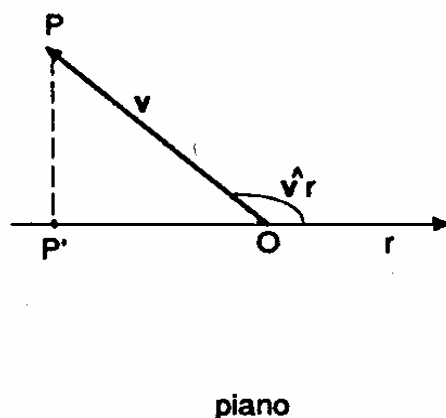
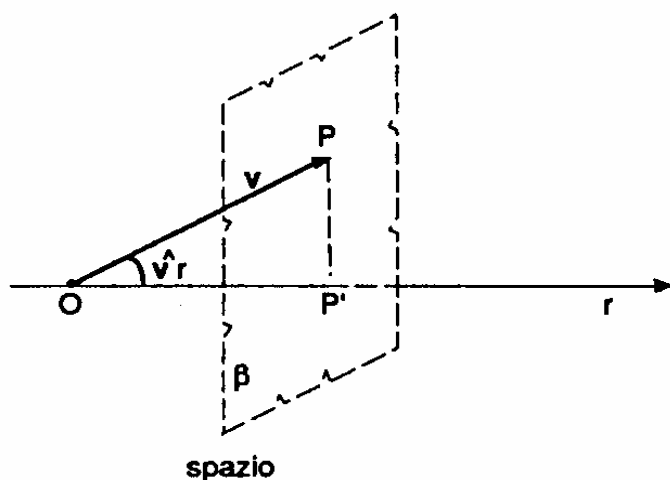
1.1 Definizione. Si chiama componente di un vettore v secondo la retta orientata r il numero reale v_r definito da:

$$(1.2) \quad v_r = \|v\| \cos \hat{v}r,$$

dove $\|v\|$ è il modulo del vettore v (cioè la lunghezza del segmento che lo rappresenta) e $\hat{v}r$ è l'angolo formato da v con la semiretta positiva di origine O , determinata dall'orientazione di r e ad essa parallela. ♣

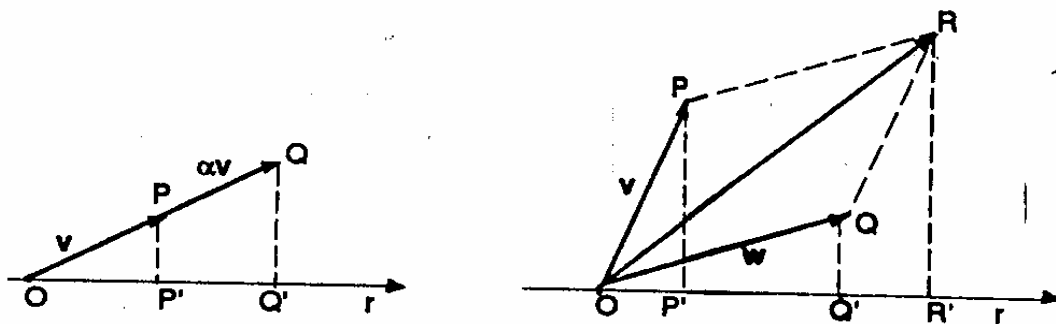
Chiaramente ci si può sempre ridurre al caso $O \in r$. Geometricamente la (1.2) equivale ad effettuare la proiezione ortogonale P' dell'estremo P del vettore $v = OP$ sulla retta r , calcolare la misura del segmento OP' ed attribuire ad essa il segno positivo o negativo a seconda che il punto P' si trovi o no nella semiretta positiva, ($v_r = 0$ se $P' = O$, cioè se il vettore è ortogonale alla retta).

Ricordiamo che nello spazio la proiezione P' del punto P su r è il



punto d'intersezione della retta r con il piano β per P ortogonale ad r . Nel piano si pone la stessa definizione (1.2) ed il punto P' è determinato dall'intersezione di r con la retta per P ortogonale ad r .

Si verifica immediatamente che:



$$(1.3) \quad (\alpha v)_r = \alpha v_r \quad (v + w)_r = v_r + w_r.$$

Siamo ora in grado di definire il “prodotto scalare” in $\mathcal{V}_O$.

1.4 Definizione. Si chiama prodotto scalare euclideo l'applicazione che associa ad ogni coppia di vettori v, w di $\mathcal{V}_O$ il numero reale $\langle v, w \rangle$ dato dalla formula:

$$(1.5) \quad \langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \hat{v}w.$$

Spesso nella letteratura invece del simbolo $\langle v, w \rangle$ si trova anche il simbolo $v \cdot w$ oppure $v \times w$.

Osserviamo che la (1.5), che consiste nel fare il prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo da essi individuato, può anche leggersi come il prodotto del modulo di v per la componente w_v di w rispetto alla retta orientata v individuata da v , oppure come il prodotto del modulo di w per la componente v_w di v secondo la retta orientata w individuata da w :

$$(1.5') \quad \langle v, w \rangle = \|v\| w_v = \|w\| v_w.$$

1.6 PROPRIETÀ. Per il prodotto scalare in $\mathcal{V}_O$ valgono le seguenti proprietà:

- (I) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ simmetria,
- (II) $\langle av_1 + bv_2, w \rangle = a\langle v_1, w \rangle + b\langle v_2, w \rangle$
 $\langle v, aw_1 + bw_2 \rangle = a\langle v, w_1 \rangle + b\langle v, w_2 \rangle$ bilinearità,
- (III) $\langle v, v \rangle \geq 0$, essendo $= 0$ se e solo se $v = 0$ positività.

Dim. La (I) e la (III) sono evidenti dalla definizione, le (II) seguono immediatamente dalle proprietà (1.3), tenuto conto della (1.5').

Lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ ha ora una struttura più ricca di quella considerata nel capitolo 2, in quanto vi è questa ulteriore operazione; diremo quindi che è un esempio di “spazio vettoriale euclideo”.

Osserviamo che le stesse considerazioni fatte per $\mathcal{V}_O$ valgono, con riferimento al piano euclideo, per lo spazio vettoriale bidimensionale $\mathcal{V}'_O$.

Tramite il prodotto scalare possiamo esprimere le nozioni a noi già note di lunghezza, di misura di un angolo e di ortogonalità. Infatti si ha:

$$\|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{1/2} \quad \text{modulo}$$

$$\cos \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{o}, \mathbf{w} \neq \mathbf{o} \quad \text{coseno dell'angolo}$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \iff \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \quad \text{ortogonalità.}$$

Osserviamo che il vettore nullo è "ortogonale" a tutti i vettori; per vettori non nulli si ha l'usuale ortogonalità.

1.7 Definizione. Una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_O$ si dice ortonormale se i vettori hanno modulo 1 e sono mutuamente ortogonali, cioè:

$$\langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}, \mathbf{i} \rangle = 0.$$

Vogliamo trovare ora come si esprime il prodotto scalare di due vettori in funzione delle coordinate in una qualunque base ortonormale. Dati i vettori:

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k},$$

dalle proprietà 1.6 segue che:

$$(1.8) \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \rangle = xx' + yy' + zz',$$

cioè il prodotto scalare di due vettori in $\mathcal{V}_O$ si esprime, rispetto ad una base ortonormale, come la *somma dei prodotti delle coordinate omonime dei vettori*.

Da 1.8 segue che la lunghezza di un vettore si esprime con la formula:

$$(1.9) \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

il coseno dell'angolo si esprime con la formula:

$$(1.10) \quad \cos \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

l'ortogonalità si esprime con la formula:

$$(1.11) \quad xx' + yy' + zz' = 0$$

1.12 **PRODOTTO SCALARE CANONICO IN $\mathbf{R}^3$.** La formula (1.8) suggerisce la possibilità di introdurre anche in $\mathbf{R}^3$ una struttura di *spazio vettoriale euclideo*. Basta *definire*, per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^3$ di componenti rispettivamente x, y, z e x', y', z' , il *prodotto scalare canonico*:

$$(1.13) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle = xx' + yy' + zz' = \mathbf{x}'^T \mathbf{x}.$$

Ovviamente anche questo prodotto scalare gode delle proprietà 1.6. Le formule (1.9), (1.10), (1.11) suggeriscono di *definire* in $\mathbf{R}^3$ le nozioni di lunghezza e di misure angolari tramite le formule:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}' &= \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \end{aligned}$$

1.15 **OSSERVAZIONE.** Le nozioni di lunghezza e di misure angolari non hanno a priori significato in uno spazio vettoriale numerico; ma lo acquistano in $\mathbf{R}^3$ proprio in virtù del fatto che, nell'isomorfismo $\mathcal{V}_O \rightarrow \mathbf{R}^3$ (determinato dalla base ortonormale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) non solo le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare del primo spazio corrispondono a quelle del secondo, ma si corrispondono anche i prodotti scalari, cioè per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}_O$ si ha $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle$, dove $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ sono i vettori numerici delle coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ nella base ortonormale fissata.

Si deve però osservare che, mentre in $\mathcal{V}_O$ il prodotto scalare definito dalla (1.5) è dedotto dalla distanza e dalle misure angolari dello spazio euclideo ed in questo senso è *unico*, in $\mathbf{R}^3$ si possono introdurre altri prodotti scalari, diversi da quello canonico. Non possiamo qui giustificare questa affermazione che viene quindi data solo come notizia. ♡

L'importanza della (1.13) risiede nel fatto che può essere generalizzata ad $\mathbf{R}^n$ ponendo:

$$(1.15') \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \cdots + x_n x'_n = \mathbf{x}'^T \mathbf{x}.$$

In questo caso le proprietà di simmetria, di bilinearità e di positività sono di verifica immediata e danno luogo alla nozione di modulo e di angolo di vettori tramite le formule analoghe alle (1.14); occorre però provare che per vettori qualunque non nulli il numero $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle / (\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}'\|)$ è in modulo ≤ 1 . Di questo, e delle sue conseguenze, parleremo nel capitolo 8.

1.16 **Definizione** Una matrice quadrata A si dice ortogonale se i suoi vettori colonna sono una base ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico.



In concreto questo vuol dire che i vettori colonna $\mathbf{a}^i$ di A devono verificare le condizioni $\langle \mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j \rangle = \mathbf{a}^{iT} \mathbf{a}^j = \delta^{ij}$, dove δ^{ij} è il simbolo di Kronecker che vale 0 se $i \neq j$ e vale 1 se $i = j$. La definizione 1.16 può quindi essere riformulata nel modo seguente (cfr. 1.11 del capitolo 8):

1.17 Proposizione *Una matrice quadrata A è ortogonale se e solo se $AA^T = I$, ovvero se e solo se $A^{-1} = A^T$.* ♣

Inoltre, se A è ortogonale si ha $\det(A) = \pm 1$; infatti $\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2 = 1$. Questa condizione però non caratterizza le matrici ortogonali in quanto vi sono matrici che hanno determinante 1 e non sono ortogonali (trovare un esempio!). Le matrici ortogonali di ordine 2 sono tutte del tipo:

$$A = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}, \det(A) = 1; \quad A = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix}, \det(A) = -1$$

1.E Esercizi

In $\mathcal{V}_O$ si supponga fissata una base ortonormale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

1. Calcolare il modulo del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e la sua componente secondo il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
2. Vedere se la base $\mathbf{i}' = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{j}' = 1/(\sqrt{6})(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$, $\mathbf{k}' = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ è ortonormale.
3. Verificare che la seguente matrice è ortogonale:

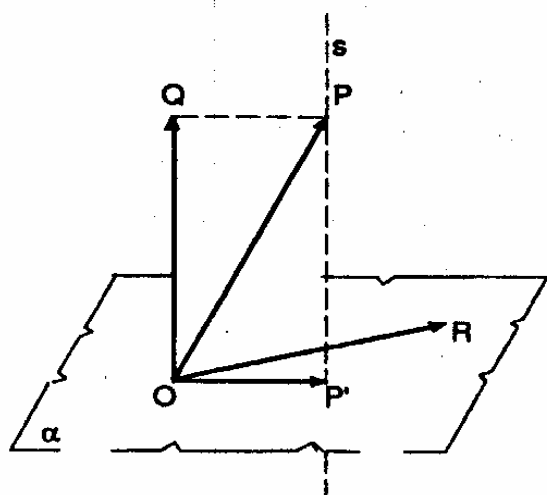
$$A = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} \end{vmatrix}.$$

2. ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

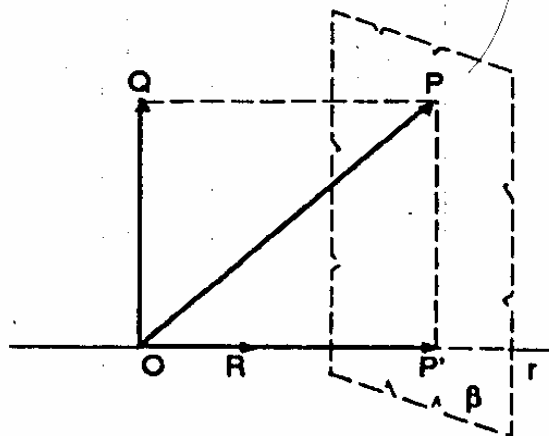
Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ munito del prodotto scalare (1.5); nella sezione 1 abbiamo già visto che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \mathbf{OP}$ su una retta r passante per il punto O (sottospazio unidimensionale) è il vettore $\mathbf{v}' = \mathbf{OP}'$, dove P' è il punto di intersezione di r con il piano per P perpendicolare ad r , detto *piano proiettante*. Ricordiamo inoltre che la proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{v} = \mathbf{OP}$ su un piano α passante per il punto O (sottospazio bidimensionale) è il vettore $\mathbf{v}' = \mathbf{OP}'$, ove P' è il

punto di intersezione di α con la retta per P perpendicolare ad α , detta *retta proiettante*.

Osserviamo che il vettore $OQ = OP - OP'$ risulta ortogonale a tutti i vettori OR del sottospazio r nel primo caso e a tutti quelli del sottospazio α nel secondo; questa proprietà caratterizza infatti il vettore proiezione OP' .



s retta proiettante

 β piano proiettante

2.1 Proposizione. Sia $W \neq \{0\}$ un sottospazio proprio di V_O ; per ogni vettore $v \in V_O$ il vettore $v' = Pv$, proiezione ortogonale di v su W , è caratterizzato dalle condizioni:

- i) $v' \in W$; ii) $\langle v - v', w \rangle = 0, \quad \forall w \in W.$ ♣

E' facile quindi determinare la proiezione v' di $v \in V_O$ su un sottospazio W . Infatti se $W = \text{Span}(w_1)$, per i) abbiamo $v' = kw_1$; inoltre, per ii), $v - v'$ deve in particolare essere ortogonale al generatore w_1 di W , pertanto $\langle v - kw_1, w_1 \rangle = \langle v, w_1 \rangle - k\langle w_1, w_1 \rangle = 0$ da cui si ricava $k = \langle v, w_1 \rangle / \langle w_1, w_1 \rangle$ ovvero:

$$(2.2) \quad Pv = v' = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1.$$

Se $W = \text{Span}(w_1, w_2)$ è un piano, per i) abbiamo $v' = kw_1 + hw_2$; per ii) $v - v'$ deve essere ortogonale ai due vettori w_1 e w_2 che costituiscono una base di W . Per semplificare le formule conviene assumere che la base sia *ortogonale*, cioè $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$. Infatti in questo caso si ha:

$$\langle v - kw_1 - hw_2, w_1 \rangle = 0 \iff k = \langle v, w_1 \rangle / \langle w_1, w_1 \rangle$$

$$\langle v - kw_1 - hw_2, w_2 \rangle = 0 \iff h = \langle v, w_2 \rangle / \langle w_2, w_2 \rangle.$$

In definitiva abbiamo:

$$(2.3) \quad Pv = v' = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2.$$

Da essa si legge che:

La proiezione ortogonale di v sul piano W è la somma delle proiezioni ortogonali su due rette (sottospazi) del piano fra loro ortogonali.

In $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare canonico, si assume la (2.1) come definizione di proiezione su un sottospazio (cfr. 1.15). Ovviamente si trovano le formule (2.2) e (2.3) (con riferimento al prodotto scalare canonico) (per la generalizzazione ad $\mathbb{R}^n$ si veda il capitolo 8, sezione 2).

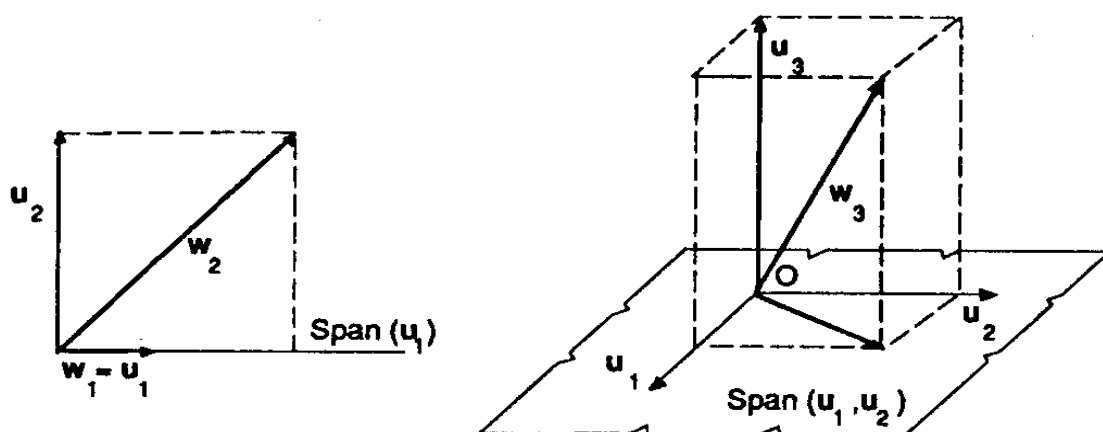
D'ora in poi quindi considereremo simultaneamente sia lo spazio V_0 che lo spazio $\mathbb{R}^3$ e lo indicheremo con V .

Vogliamo ora descrivere un algoritmo che permetta di costruire, a partire da una base $w_1, w_2, w_3 \in V$, una base ortonormale a_1, a_2, a_3 e tale che:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \text{Span}(a_1) &= \text{Span}(w_1), & \text{Span}(a_1, a_2) &= \text{Span}(w_1, w_2), \\ \text{Span}(a_1, a_2, a_3) &= \text{Span}(w_1, w_2, w_3) = V. \end{aligned}$$

Innanzitutto costruiamo i vettori u_1, u_2, u_3 in modo tale che siano una base di vettori mutuamente ortogonali e che verifichino le (2.4). Si otterrà poi una *base ortonormale* dividendo ciascuno di essi per il suo modulo.

PROCEDIMENTO DI ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT: L'idea è di costruire i vettori u_i *ricorsivamente*, facendo uso delle proiezioni ortogonali. Posto $u_1 = w_1$ si ha $\text{Span}(a_1) = \text{Span}(w_1)$; se a w_2 sottraiamo la sua proiezione ortogonale sulla retta $\text{Span}(u_1)$ otteniamo un vettore u_2 ad essa ortogonale e $\text{Span}(a_1, a_2) = \text{Span}(w_1, w_2)$ (perchè?). Se a w_3 sottraiamo la sua proiezione ortogonale sul sottospazio $\text{Span}(u_1, u_2)$ otteniamo un vettore ortogonale a tale piano.



Facendo uso di (2.2) e di (2.3) otteniamo le formule:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_1 &= w_1 \\ u_2 &= w_2 - \frac{\langle w_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \\ u_3 &= w_3 - \frac{\langle w_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle w_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \end{aligned}$$

I vettori così costruiti sono indipendenti, in quanto il sistema (2.5) è invertibile, e quindi verificano l'ultima delle (2.4).

Le (2.5) sono formule ricorsive (ciascun vettore è calcolabile, a partire dai dati, solo dopo aver calcolato i precedenti) che possono essere usate in $\mathbb{R}^3$ o generalizzate in $\mathbb{R}^n$ facendo uso del prodotto scalare canonico.

Se effettuiamo questo procedimento in $\mathbb{R}^3$ abbiamo la possibilità di costruire una terna di vettori numerici di modulo 1 e mutuamente ortogonali a partire da una terna di vettori indipendenti qualunque e quindi di costruire matrici ortogonali di ordine 3.

2.6 ESEMPIO. Determinare la base ortonormale associata, tramite il procedimento di Gram-Schmidt, alla base:

$$w_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Si ha $u_1 = w_1$ e quindi, poiché $\langle w_2, u_1 \rangle = 1$ e $\langle u_1, u_1 \rangle = 2$, risulta:

$$u_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} - 1/2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{vmatrix}.$$

Poiché $\langle u_2, u_2 \rangle = 1/2$, $\langle w_3, u_1 \rangle = 2$, $\langle w_3, u_2 \rangle = 0$ ha:

$$u_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - 2/2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Occorre ora dividere ciascuno dei vettori ottenuti per il rispettivo modulo; $\|u_1\| = \sqrt{2}$, $\|u_2\| = 1/\sqrt{2}$, $\|u_3\| = 1$ e la base ortonormale ottenuta è:

$$a_1 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

e la matrice che li ha come vettori colonna è ortogonale.

2.E Esercizi

1. Trovare la proiezione ortogonale del vettore x sul sottospazio generato dal vettore y :

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare la proiezione ortogonale del vettore u sul sottospazio $W = \text{Span}(v, w)$:

$$u = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

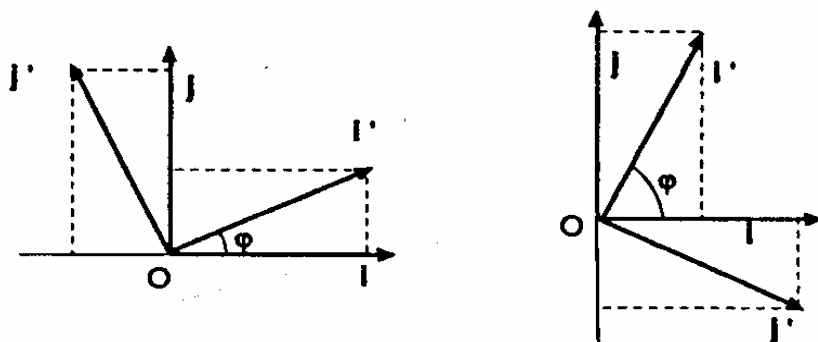
3. Ortonormalizzare la base:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. PRODOTTO VETTORIALE IN $\mathcal{V}_O$

Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ fissiamo una *base ortonormale* i, j, k . Vogliamo definire l'operazione di *prodotto vettoriale*, denotata col simbolo $\wedge$, che associa ad ogni coppia di vettori $v, w \in \mathcal{V}_O$ il vettore $v \wedge w$ dello stesso spazio. Per fare ciò abbiamo bisogno di introdurre la nozione di basi ortonormali "equivalse".

In $\mathcal{V}'_O$ si consideri un cambiamento di base ortonormale. Due casi sono possibili corrispondenti alle due situazioni segnate in figura:



Si hanno quindi i cambiamenti di base :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} i' &= \cos \varphi i + \sin \varphi j \\ j' &= -\sin \varphi i + \cos \varphi j \end{aligned} \quad A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad \det(A) = 1$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} i' &= \cos \varphi i + \sin \varphi j \\ j' &= \sin \varphi i - \cos \varphi j \end{aligned} \quad A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{vmatrix}, \quad \det(A) = -1$$

Se si effettua la rotazione del piano (attorno al punto O) di un angolo φ , la coppia (ordinata) di vettori i, j si sovrappone alla coppia (ordinata) i', j' nel caso (3.1), mentre non esiste alcuna rotazione piana che possa sovrapporre le due basi nel caso (3.2).

Infine la rotazione che sovrappone il versore i al versore j attraverso l'angolo $\pi/2$ e quella che sovrappone i' a j' sono concordi (cioè sono o entrambe orarie o entrambe antiorarie) nel caso (3.1) e definiscono la stessa *orientazione* del piano; sono discordi nel caso (3.2).

Quanto visto giustifica la seguente definizione geometrica:

3.3 Definizione. Due basi ortonormali (in $\mathcal{V}'_O$ o in $\mathcal{V}_O$) si dicono *equiverse* se sono sovrapponibili. In caso contrario si dicono *contraverse*. ♣

Nel piano abbiamo visto che questo corrisponde al fatto analitico (cfr. (3.1) e (3.2)) che si abbia $\det(A) = 1$. Ciò è vero in generale anche in $\mathcal{V}_O$, infatti si può dimostrare che:

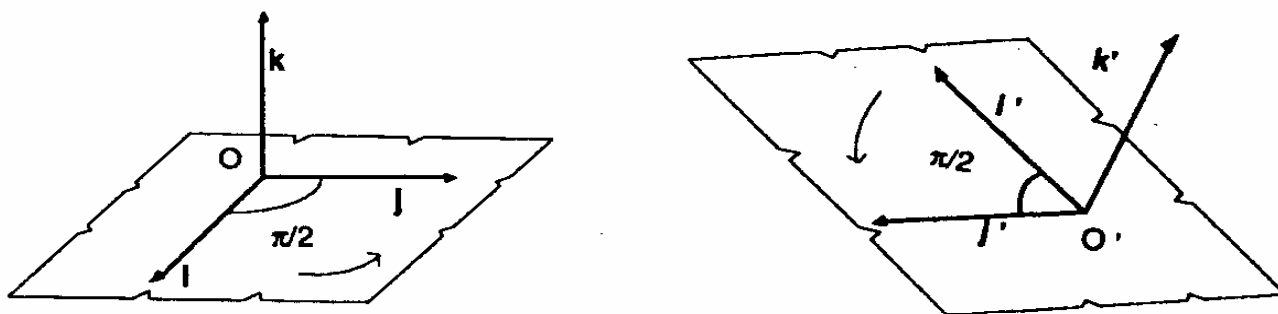
3.4 Proposizione. Date due basi ortonormali ed indicata con A la matrice ortogonale che contiene per colonne le coordinate dei vettori di una base rispetto all'altra, si ha che le due basi sono equiverse se e solo se $\det(A) = 1$. Altrimenti sono contraverse. ♣

Avremmo quindi potuto assumere questa come definizione (essa ha il vantaggio di essere generalizzabile ad $\mathbb{R}^n$!); abbiamo preferito quella geometrica in quanto è più intuitiva.

Analizziamo ancora la situazione in $\mathcal{V}_O$. Lo studente è abituato anche dalla fisica a considerare, nello spazio, basi sovrapponibili e non sovrapponibili. È chiaro a tutti l'impossibilità di sovrapporre per esempio la base costituita ordinatamente dalle tre dita "pollice, indice, medio" della mano destra, e quella costituita ordinatamente dalle stesse tre dita della mano sinistra, mentre è possibile sovrapporre due basi relative alla stessa mano destra oppure sinistra (di persone diverse).

Nello spazio la rotazione attorno alla retta generata da k che sovrappone i a j attraverso l'angolo $\pi/2$ è *oraria* o *antioraria* a seconda da quale parte del piano la si osservi. È facile ora convincersi che per due riferimenti ortonormali equiversi (e quindi sovrapponibili) il verso della rotazione che sovrappone i a j e quello della rotazione che

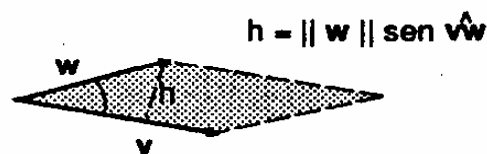
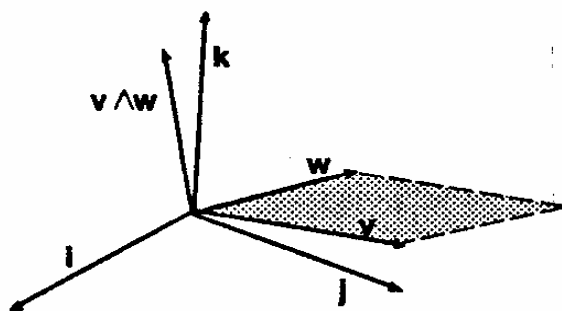
sovrappone i' a j' , (attraverso l'angolo $\pi/2$), sono identici (entrambi orari o antiorari) se visti rispettivamente da k e k' e viceversa (per comodità di visualizzazione abbiamo disegnato le due terne a partire da due punti distinti O e O'); essi definiscono quindi la stessa *orientazione* dello spazio:



Passiamo ora a definire l'operazione $\wedge$ di prodotto vettoriale.

3.5 Definizione. Se i due vettori v e w sono dipendenti (o in particolare se uno dei due è nullo) si pone $v \wedge w = 0$; se i due vettori v e w sono indipendenti $v \wedge w$ è definito tramite il modulo, la direzione ed il verso:

- il modulo è uguale all'area del parallelogramma costruito sui due vettori v e w ,
- la direzione è ortogonale al piano individuato da v e w ,
- il verso è tale che la terna ordinata $v, w, v \wedge w$ sia equiversa alla terna i, j, k . ♣



Osserviamo che il modulo di $v \wedge w$ è dato da:

$$\|v \wedge w\| = \|v\| \|w\| \sin \hat{v}w.$$

Le seguenti proprietà sono di facile verifica:

- (I) $v \wedge w = -w \wedge v$,
- (II) $(\alpha v) \wedge w = \alpha(v \wedge w)$,
- (III) $(v_1 + v_2) \wedge w = v_1 \wedge w + v_2 \wedge w$.

La (I) e la (II) sono conseguenza immediata della definizione, la dimostrazione di (III) è un po' più elaborata e la omettiamo per brevità.

Le proprietà ora citate sono importanti perché ci consentono di operare facendo uso delle coordinate dei vettori nella base ortonormale fissata. Posto: $\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ ed operando con le regole dette si ottiene:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \wedge (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

dove il determinante viene sviluppato con le ordinarie regole anche se la prima riga non è numerica ma figurano vettori. Si noti che nel calcolo si è tenuto conto che: $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{o}$, $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$. In definitiva abbiamo provato la:

3.6 Proposizione. *Le componenti del prodotto vettoriale di due vettori di $\mathcal{V}_O$ rispetto ad una base ortonormale sono date ordinatamente dai minori estratti dalla matrice delle coordinate dei due vettori (nell'ordine) e presi con il segno alterno.* ♣

3.7 ESEMPIO. Il prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ è dato da:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Da ciò si legge che il vettore $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ è ortogonale al piano generato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e che l'area del parallelogramma costruito su questi vettori è $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}$. ♥

3.8 OSSERVAZIONE. L'operazione di prodotto vettoriale può essere estesa a più vettori, ma deve essere precisato l'ordine con cui queste vengono eseguite. Infatti in generale $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u})$ e quindi l'espressione $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$ è ambigua. ♥

4. ESPRESSIONI ANALITICHE PER LE MISURE DI DISTANZE E DI ANGOLI. CONDIZIONI DI ORTOGONALITÀ

In questa e nelle sezioni che seguiranno assumeremo di aver fissato un riferimento ortonormale $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ di coordinate x, y, z nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ (il piano è ottenuto poi dallo spazio come caso particolare). Come abbiamo visto nella sezione 1, lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ è uno spazio vettoriale metrico, cioè è munito di un prodotto scalare che si esprime

nella base ortonormale i, j, k come la somma dei prodotti delle coordinate omonime dei vettori.

Vogliamo quindi esplicitare le formule che ci permettano di calcolare analiticamente distanze e/o angoli.

DISTANZA DI DUE PUNTI $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $Q_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Si calcola tramite il teorema di Pitagora o, ciò che è lo stesso, tramite il modulo del vettore $v = OQ_1 - OQ_0 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$; si ottiene quindi:

$$(4.1) \quad d(Q_0, Q_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

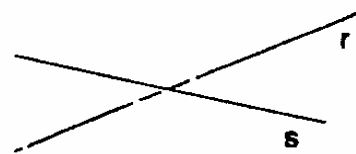
Prima di introdurre misure angolari ricordiamo i seguenti fatti geometrici. Due rette r ed s nello spazio possono assumere le seguenti posizioni reciproche:



(a)

(b)

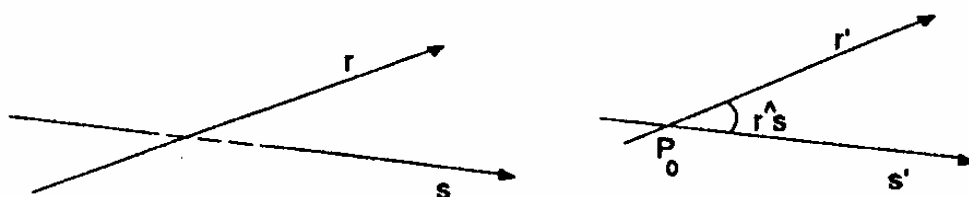
rette complanari



(c)

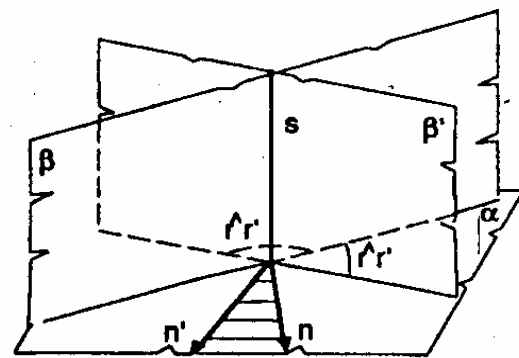
rette sghembe

Osserviamo che due rette r ed s incidenti in un punto P_0 determinano due angoli convessi; se le due rette sono *orientate* l'angolo convesso da esse individuato è *unico* e coincide con l'angolo convesso delle due semirette positive.



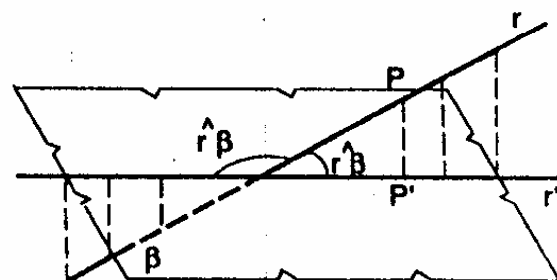
Se r ed s non sono incidenti si assume come angolo quello individuato dalle rette r' ed s' , parallele rispettivamente ad r ed s ed equiorientate, condotte da un qualunque punto dello spazio.

Due piani β e β' incidenti in una retta s determinano due angoli diedri la cui misura coincide con quella degli angoli piani formati dalle rette r ed r' di intersezione di β e β' con un qualunque piano α ortogonale all'asse s . Questi ultimi, a loro volta, coincidono con gli angoli formati dalle rette n ed n' ortogonali rispettivamente ai piani β e β' e passanti per un medesimo punto (tali angoli si possono infatti sovrapporre con una rotazione dello spazio). Per individuare uno dei due angoli basta quindi

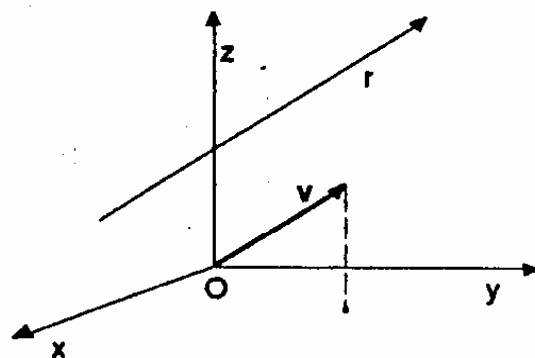


orientare tali perpendicolari.

Una retta r ed un piano β determinano due angoli, quelli che la retta r forma con la sua *proiezione ortogonale* sul piano β (proiezione che si ottiene per intersezione con il piano α passante per r e perpendicolare a β).



ORIENTAZIONE DI UNA RETTA. Per orientare una retta basta scegliere un suo vettore direttore v . Naturalmente i multipli av con $a > 0$ determinano la stessa orientazione; quelli con $a < 0$ determinano l'orientazione opposta. Se la retta è, per esempio, orientata nel *verso delle z crescenti*, i vettori direttori che danno questa orientazione devono avere la terza coordinata positiva (componente secondo l'asse z). Analogo discorso se la retta è orientata secondo il verso delle x crescenti o decrescenti, ovvero nel verso delle y crescenti o decrescenti.



Per esempio consideriamo la retta r di equazioni parametriche $x = t$, $y = 2t$, $z = -t$ orientata nel verso delle z crescenti. Un vettore direttore è dato da $v = (1, 2, -1)$. Esso però non determina l'orientazione voluta, bensì quella opposta. Il vettore $w = -v = (-1, -2, 1)$ determina l'orientazione assegnata per r .

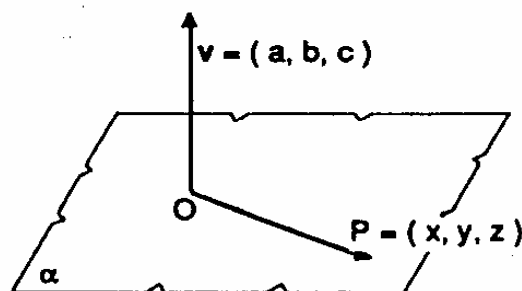
VERSO DI UNA RETTA ORIENTATA. È il vettore direttore orientato come la retta e di modulo 1 (se la retta non è orientata i versori sono due). Per determinarlo basta partire da un vettore direttore che abbia l'orientazione voluta e dividerlo per il suo modulo. Così nell'esempio precedente si ha $\text{vers } r = (1/\sqrt{6})(-1, -2, 1)$.

ANGOLO DI DUE VETTORI $v = (l, m, n)$, $w = (l', m', n')$. Si calcola dalla

espressione del prodotto scalare $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \hat{\mathbf{v}}\mathbf{w}$, tenuto conto che sia il prodotto scalare che il modulo di un vettore si possono calcolare anche tramite le componenti. Si ottiene:

$$(4.2) \quad \cos \hat{\mathbf{v}}\mathbf{w} = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

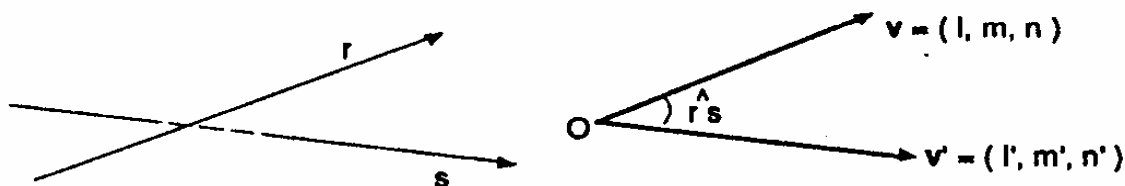
SIGNIFICATO METRICO DEI COEFFICIENTI DI GIACITURA DI UN PIANO. Sia β il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia α il piano parallelo a β per l'origine. Il vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$ risulta *ortogonale a tutti i vettori* $\mathbf{OP} = (x, y, z)$ di α , infatti $\langle \mathbf{OP}, \mathbf{v} \rangle = ax + by + cz = 0$ visto che il punto P appartiene al piano α . Ne segue che i coefficienti a, b, c dell'equazione di un piano rappresentano le coordinate di un vettore ortogonale al piano (e a tutti i piani ad esso paralleli).



Funzioni goniometriche degli angoli fra rette, fra piani e fra retta e piano si determinano ora facilmente facendo uso del prodotto scalare.

ANGOLO DI DUE RETTE ORIENTATE r ed r' . Basta scegliere i vettori direttori $\mathbf{v} = (l, m, n)$ e $\mathbf{w} = (l', m', n')$ rispettivamente per r ed r' orientati come le rette. Il loro prodotto scalare fornisce la formula:

$$(4.3) \quad \cos \hat{r}r' = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}} = \langle \text{vers } r, \text{vers } r' \rangle$$



• Notare che $\text{vers } r$ (ed analogamente $\text{vers } r'$) ha componenti:

$$l/\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}, \quad m/\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}, \quad n/\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

• **ANGOLO DI DUE RETTE NON ORIENTATE r ed r' .** Non essendo precisata l'orientazione, il coseno di tale angolo è definito a meno del segno; si ha quindi la formula:

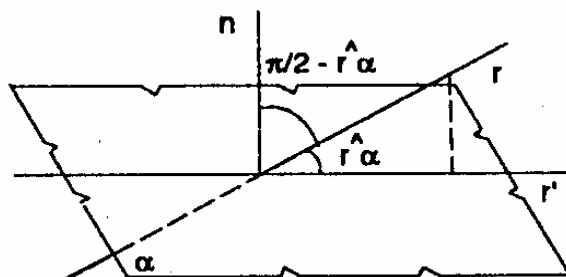
$$(4.3') \quad \cos \hat{r}r' = \pm \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

ANGOLO DI DUE PIANI α e α' . Il coseno di tale angolo è definito a meno del segno (essendo gli angoli di fatto due e supplementari). Si ottiene la formula:

$$(4.4) \quad \cos \hat{\alpha}\alpha' = \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = \pm \cos \hat{n}\hat{n}'.$$

ANGOLO DI UNA RETTA r CON UN PIANO α . È facile valutare il seno di tale angolo:

$$(4.5) \quad \sin \hat{r}\alpha = \left| \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \right| = \left| \cos \hat{r}\hat{n} \right|.$$

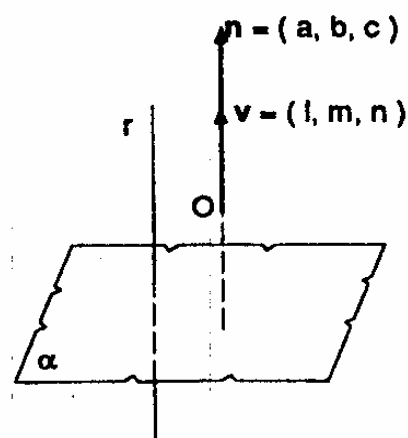
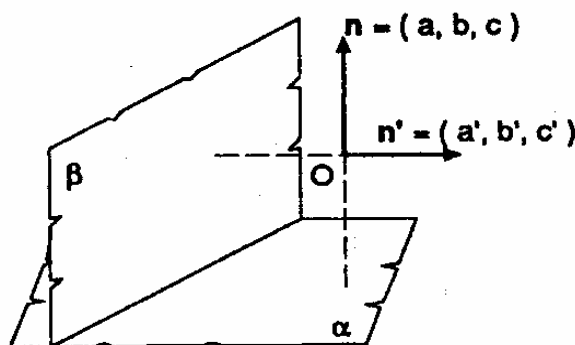
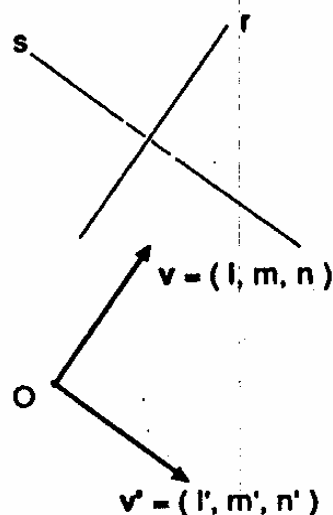


CONDIZIONI DI ORTOGONALITÀ. Si esprimono facendo uso del prodotto scalare o della condizione di parallelismo fra i vettori caratteristici della retta e del piano.

$$(4.6) \quad ll' + mm' + nn' = 0 \quad \text{ortogonalità fra rette,}$$

$$(4.7) \quad aa' + bb' + cc' = 0 \quad \text{ortogonalità fra piani,}$$

$$(4.8) \quad a : l = b : m = c : n \quad \text{ortogonalità fra retta e piano.}$$

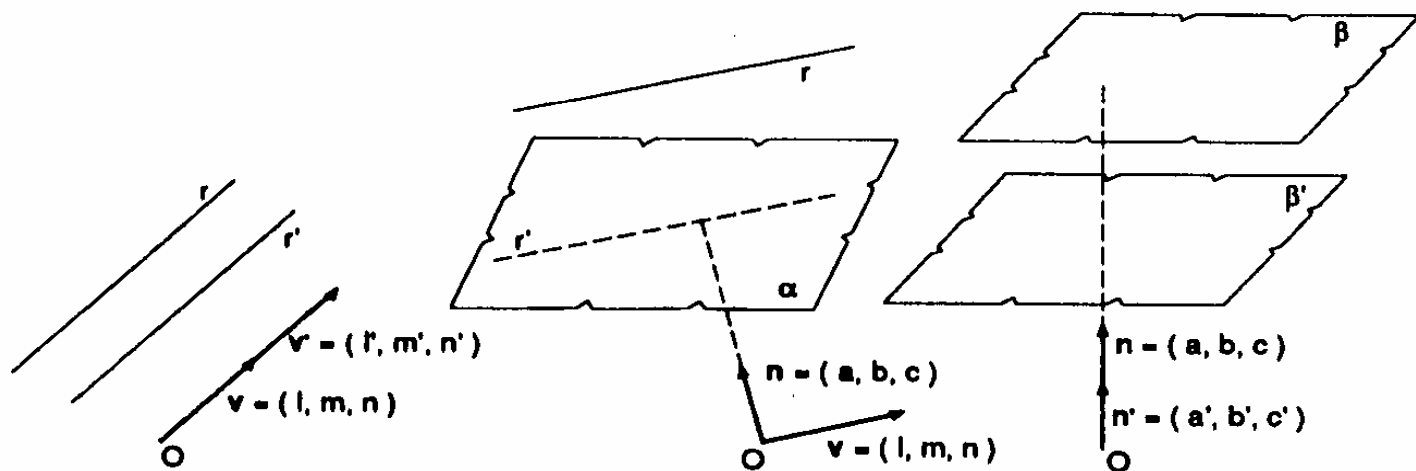


OSSERVAZIONE. Se nello spazio è fissato un riferimento ortonormale, le condizioni di parallelismo si possono *rileggere* facendo uso anche della ortogonalità:

(4.9) $l : l' = m : m' = n : n'$ parallelismo fra rette,

(4.10) $a : a' = b : b' = c : c'$ parallelismo fra piani,

(4.11) $al + bm + cn = 0$ parallelismo fra retta e piano.

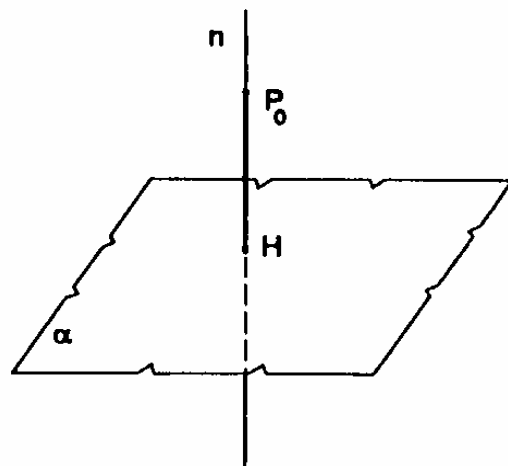


4.12 ESERCIZIO. Determinare la retta r passante per il punto $P = (1, 0, -1)$ ortogonale ed incidente alla retta s di equazioni $x = 2z - 1$, $y = -z + 1$.

Poiché $P \notin s$ la retta cercata è unica ed appartiene sia al piano per P ed ortogonale ad s , sia al piano β passante per P ed ortogonale ad s . I parametri direttori di s sono $(2, -1, 1)$; la condizione (1.8) dice che i coefficienti a, b, c del piano α devono essere proporzionali (in particolare uguali) ai parametri direttori di s , ne segue che α ha equazione $(x-1) - 1(y-0) + 1(z+1) = 0$. Il piano β appartiene al fascio di equazione $(x-1) - 1(y-0) + 1(z+1) + k(y+z-1) = 0$ e si ottiene per il valore $k = 2$. La retta r ha equazioni $2x - y + z - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$. ♥

c **DISTANZA DI UN PUNTO P_0 DA UN PIANO.**

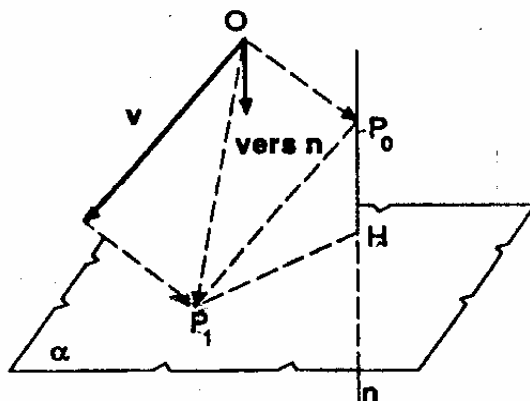
Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed α il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$. Ricordiamo che la distanza di P_0 da α è la distanza $d(P_0, H)$ dove $H = n \cap \alpha$ ed n è la retta per P_0 ortogonale ad α e quindi è facilmente determinabile con rapidi calcoli.



* Proponiamo ora un metodo alternativo che condurrà alla formula particolarmente significativa ed utile:

$$(4.13) \quad d(P_0, \alpha) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

Indichiamo con $\text{vers } n$ uno dei due versori della retta n , quello di componenti $(1/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})(a, b, c)$



Sia $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ un punto qualunque di α (per esso si ha quindi $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$) e sia $\mathbf{v} = \mathbf{OP}_1 - \mathbf{OP}_0$; il valore assoluto del prodotto scalare $\langle \mathbf{v}, \text{vers } n \rangle$ uguaglia la distanza cercata. Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$|\langle \mathbf{v}, \text{vers } n \rangle| = |\langle \mathbf{OP}_1 - \mathbf{OP}_0, \text{vers } n \rangle| = |\langle \mathbf{OP}_1, \text{vers } n \rangle - \langle \mathbf{OP}_0, \text{vers } n \rangle|.$$

Poiché:

$$\langle \mathbf{OP}_1, \text{vers } n \rangle = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\langle \mathbf{OP}_0, \text{vers } n \rangle = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

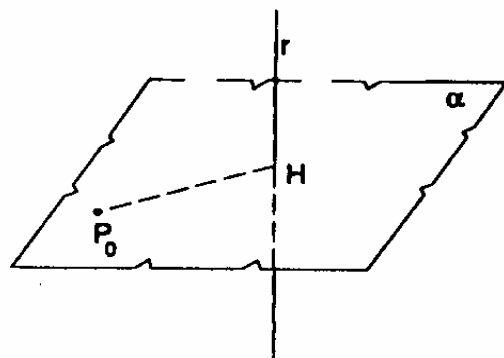
la formula proposta si ottiene per sostituzione.

DISTANZA DI UN PUNTO P_0 DA UNA RETTA r NEL PIANO. Data l'analogia fra l'equazione cartesiana di una retta nel piano e di un piano nello spazio, si deduce subito la formula:

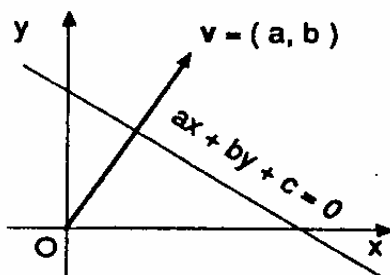
$$(4.14) \quad d(P_0, r) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|,$$

dove r ha equazione $ax + by + c = 0$, e $P_0 = (x_0, y_0)$. *

DISTANZA DI UN PUNTO P_0 DA UNA RETTA r NELLO SPAZIO. Anche in questo caso si può dedurre una formula, ma il procedimento più rapido è quello geometrico che consiste nel determinare il piano α per P_0 ortogonale ad r ed il punto $H = r \cap \alpha$, in quanto $d(P_0, r) = d(P_0, H)$.



Le formule (4.1) ... (4.13) fanno riferimento ad enti geometrici posti nello spazio, la (4.14) riguarda invece un problema nel piano x, y , ma la formula è stata dedotta direttamente dalla (1.13) sulla base dell'osservazione (cfr. capitolo 4) dell'analogia fra l'equazione cartesiana di una retta nel piano e l'equazione cartesiana di un piano nello spazio. Le altre formule possono essere riscritte nel caso del piano tenendo conto, oltre dell'analogia nel caso di equazioni cartesiane, anche di quella nel caso di equazioni parametriche. In particolare i parametri direttori di una retta nel piano x, y sono (l, m) ovvero $(l, m, 0)$ e quindi nelle formule già trovate basta porre $n = 0$. Ricordiamo infine che i coefficienti a, b dell'equazione cartesiana della retta $ax + by + c = 0$ rappresentano le coordinate di un vettore ortogonale alla retta.



Le formule più importanti che si ottengono sono le seguenti.

$$(4.15) \quad \cos \hat{r}r' = \frac{ll' + mm'}{\pm \sqrt{(l^2 + m^2)(l'^2 + m'^2)}} = \frac{aa' + bb'}{\pm \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}},$$

$$(4.16) \quad r \perp r' : \quad ll' + mm' = 0 = aa' + bb'$$

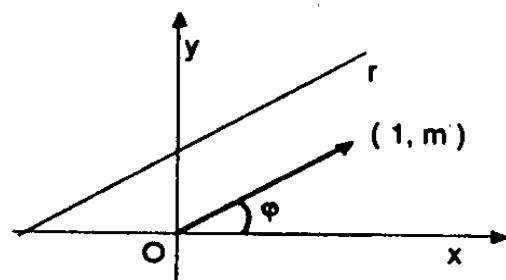
Le espressioni esprimono rispettivamente il *coseno dell'angolo* di due rette non orientate e la *condizione di ortogonalità* in funzione dei parametri direttori ovvero dei coefficienti delle equazioni cartesiane delle rette medesime.

Se le rette r ed r' sono scritte in *forma ridotta*:

$$r : y = mx + p, \quad r' : y = m'x + p',$$

e quindi i parametri direttori ridotti sono rispettivamente $(1, m)$, $(1, m')$ la condizione di ortogonalità si scrive anche:

$$(4.17) \quad mm' + 1 = 0,$$



ove m rappresenta il coefficiente angolare della retta r , in quanto tale numero è legato all'angolo formato da r con l'asse x .

OSSERVAZIONE. Sia r una retta orientata e sia $\text{vers } r = (\alpha, \beta, \gamma)$ il versore corrispondente. Risulta:

$$(4.18) \quad \alpha = \cos \hat{r}x, \quad \beta = \cos \hat{r}y, \quad \gamma = \cos \hat{r}z,$$

infatti $\cos \hat{r}x = \langle \text{vers } r, i \rangle = \langle \alpha i + \beta j + \gamma k, i \rangle = \alpha$ ed analogamente per le altre due uguaglianze. I numeri $\cos \hat{r}x$, $\cos \hat{r}y$, $\cos \hat{r}z$ prendono il nome di *coseni direttori* della retta orientata e coincidono con le componenti del versore della retta (orientato come la retta).

4.E Esercizi

Spazio euclideo, riferimento ortonormale $RC(O, i, j, k)$.

1. Determinare le coordinate del versore u parallelo ai piani $x+y-z=0$, $x+z=0$ e formante un angolo acuto con il vettore $v = (-2, 0, 1)$.
2. Vedere se i punti $A = (2, 0, -2)$, $B = (1, 2, 1)$, $C = (-1, -2, -1)$ individuano un triangolo rettangolo e/o isoscele.
3. Si consideri la retta r passante per l'origine e di vettore direttore $v = (1, 1, 1)$. Determinare il punto M' proiezione ortogonale del punto $M = (2, -3, 0)$ sulla retta r .
4. Calcolare il coseno dell'angolo formato dalla retta r_1 di equazioni $x = -t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + t$ e dalla retta r_2 di equazioni $x - y + z = 0$, $2x + 3y - (1/2)z + 4 = 0$, orientate rispettivamente secondo il parametro t decrescente e secondo le x crescenti.
5. Dati i due piani α ed α' di equazioni $x - y + z + 1 = 0$ e $x + y - z - 1 = 0$:
 - a) determinare il coseno degli angoli da essi individuati;
 - b) determinare una equazione per il piano contenente la retta r di intersezione di α ed α' ed ortogonale al piano $\beta: x + y + z = 0$;

6. Determinare la proiezione ortogonale della retta r di equazioni $x = 2z - 1$, $y = -z + 3$ sul piano α di equazioni parametriche $x = 2t - t' - 1$, $y = -t' + 2$, $z = t - 2t'$.
7. Determinare la retta passante per il punto $P = (0, 1, 1)$ perpendicolare ed incidente alla retta r di equazioni $x = 1 - 3t$, $y = t + 1$, $z = -t + 2$.
8. Scrivere equazioni per le rette passanti per il punto $P_0 = (1, 1, 2)$ ed ortogonali alla retta r di equazioni $x = 1 - 3t$, $y = t + 1$, $z = -t + 2$.
9. Scrivere equazioni per i piani paralleli simultaneamente alla retta r di equazioni $x - y - z = 0$, $x + 2z - 1 = 0$ ed alla retta s di equazioni $x = t$, $y = -t$, $z = -2$.
10. Determinare la distanza del punto $P = (1, 3, 2)$ dal piano α di equazioni $x = 1 - t + t'$, $y = t - 1$, $z = t + t'$.
11. Determinare, se esiste, la retta perpendicolare ed incidente alle due rette r ed s di equazioni rispettivamente: $x = t$, $y = -t - 1$, $z = -2t$ e $x = 3t' - 1$, $y = t'$, $z = -t' + 1$. (Si consiglia di prendere i punti R ed S variabili rispettivamente su r ed s e di imporre al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{OS} - \mathbf{OR}$ di essere ortogonale alle due rette date, etc.).
12. Determinare la minima distanza delle due rette r ed s assegnate nell'esercizio 11.
13. Determinare la distanza del punto $P = (1, -1, -3)$ dalla retta r di equazioni $x - 2y - 3z - 1 = 0$, $x + 2z - 2 = 0$.
14. Determinare la minima distanza della retta r di equazioni $x - 2y - 1 = 0$, $y + z + 2 = 0$ dalla retta s di equazioni $x + y + z + 1 = 0$, $2x - y + z - 2 = 0$. (Si consiglia di determinare il piano α passante per r parallelo ad s , etc.).

5. RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DI ALCUNE CURVE DEL PIANO DEFINITE FACENDO USO DI DISTANZE

Nel piano ordinario vi sono numerose curve notevoli. Alcune di esse si possono definire facendo uso della distanza, come per esempio la circonferenza, l'ellisse, etc.. Ci proponiamo qui di determinare per esse una rappresentazione analitica, aspettandoci a priori, in analogia al caso delle rette, di trovare sia equazioni cartesiane che equazioni parametriche. Faremo quindi uso di un riferimento cartesiano $RC(O, x, y)$.

EQUAZIONE (CARTESIANA) DELLA CIRCONFERENZA. La circonferenza di centro il punto $C = (\alpha, \beta)$ e raggio r è il luogo dei punti $Q = (x, y)$ la cui distanza da C è pari al raggio, pertanto deve aversi:

$$(5.1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad \text{equazione della circonferenza di centro e raggio assegnati.}$$

Sviluppando la (5.1) si ottiene un'equazione del tipo:

$$(5.2) \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad \text{equazione generale della circonferenza}$$

dove le coordinate del centro ed il raggio si ricavano da:

$$(5.3) \quad a = -2\alpha, \quad b = -2\beta, \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.$$

Notiamo che l'equazione (5.2) non sempre rappresenta una circonferenza, infatti da (5.2) si risale a (5.1) se e solo se i coefficienti reali a, b, c , sono tali che da (5.3) si ricavi:

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = a^2/4 + b^2/4 - c > 0,$$

infatti il raggio deve essere un numero reale positivo e quindi il suo quadrato deve essere strettamente positivo.

In definitiva ogni circonferenza ha un'equazione del tipo (5.2) e viceversa questa rappresenta una circonferenza solo se è verificata la condizione:

$$(5.4) \quad a^2 + b^2 - 4c > 0.$$

In ogni caso i coefficienti che figurano in (5.2) sono essenziali e quindi le circonferenze costituiscono un sistema lineare ∞^3 di curve nel piano.

EQUAZIONE (CARTESIANA) CANONICA DI UN'ELLISSE E DI UNA IPERBOLE NEL PIANO x, y . Ricordiamo che un'ellisse è definita come il luogo dei punti P del piano per i quali si mantiene costante la somma delle distanze da due punti fissi F e F' (detti fuochi dell'ellisse). Un'iperbole è definita come il luogo dei punti P del piano per i quali si mantiene costante, in valore assoluto, la differenza delle distanze da due punti fissi F e F' (detti fuochi dell'iperbole).

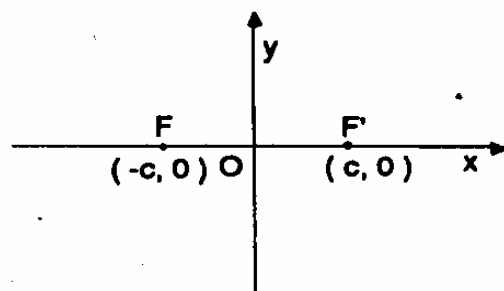
In definitiva abbiamo per l'ellisse e l'iperbole rispettivamente le condizioni:

$$(5.5) \quad d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

a costante positiva.

$$(5.6) \quad |d(P, F) - d(P, F')| = 2a$$

Fissiamo ora nel piano un *riferimento ortonormale* $RC(O, x, y)$ opportuno per il quale l'origine O coincida con il punto medio del segmento FF' , l'asse x sia la retta passante per F e F' (tale riferimento non è ovviamente unico in quanto non è determinata l'orientazione degli assi).



In ogni caso possiamo sempre supporre che i punti F e F' abbiano rispettivamente coordinate: $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$, con $c > 0$.

Osserviamo che geometricamente abbiamo:

$$2c = d(F, F') \quad \begin{cases} a > c & \text{nel caso dell'ellisse,} \\ a < c & \text{nel caso dell'iperbole.} \end{cases}$$

Facendo uso delle coordinate le condizioni (5.5) e (5.6) diventano rispettivamente:

$$(5.7) \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$(5.8) \quad \left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Quadrando due volte e dividendo per il fattore non nullo $a^2(a^2 - c^2)$ si ottiene in entrambi i casi l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

che può essere riscritta nel caso dell'ellisse:

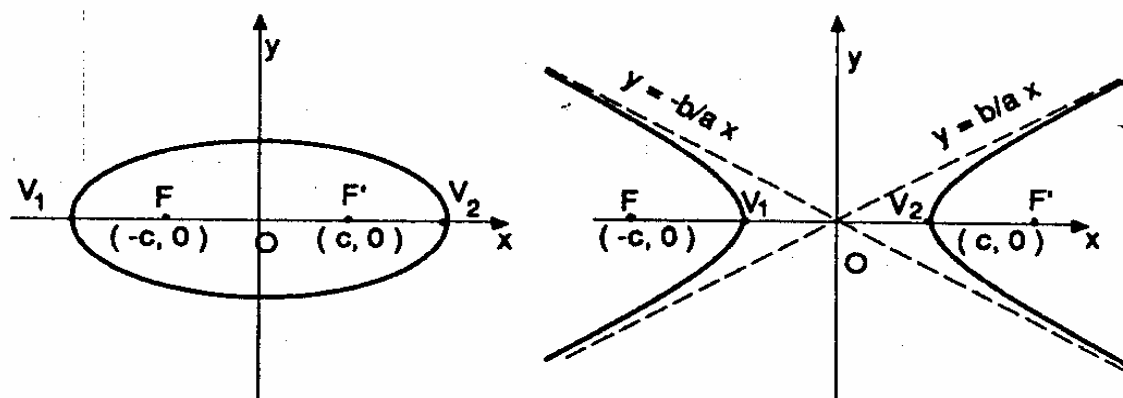
$$(5.9) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{equazione canonica dell'ellisse,}$$

e nel caso dell'iperbole:

$$(5.10) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{equazione canonica dell'iperbole.}$$

Le equazioni (5.9) e (5.10) prendono rispettivamente il nome di "equazioni canoniche" dell'ellisse e dell'iperbole in quanto si riferiscono ad una scelta particolare del riferimento ortonormale.

Le due costanti positive a e b prendono il nome di *semiassi* ed è facile risalire da essi alle coordinate dei due fuochi, così come è indicato in (5.9) e (5.10); le rette $y = \pm(b/a)x$ sono gli asintoti dell'iperbole.



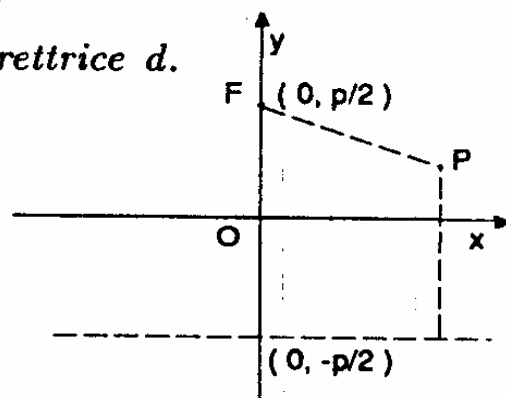
Osserviamo che, per costruzione, nel caso dell'ellisse risulta $a \geq b$, inoltre $2a$ è la distanza massima di due punti P_1, P_2 variabili sulla curva, i punti V_1 e V_2 in cui $d(V_1, V_2)$ è massima sono i *vertici* (unici se $a \neq b$). Nel caso dell'iperbole $2a$ è la distanza minima di due punti P_1 e P_2 , dove P_1 varia su un ramo e P_2 sull'altro ramo della curva.

EQUAZIONE (CARTESIANA) CANONICA DELLA PARABOLA. Supponiamo assegnata una retta d ed un punto F . La curva luogo dei punti P del piano per i quali risulta:

$$(5.11) \quad d(P, F) = d(P, d)$$

è per definizione la *parabola di fuoco F e direttrice d* .

Fissiamo un riferimento cartesiano $RC(O, x, y)$ opportuno, così come indicato in figura, rispetto al quale F ha coordinate $(0, p/2)$, d ha equazione $y = -p/2$, e p è la distanza $d(F, d)$ (il numero positivo p si chiama anche il *parametro* della parabola).



Sviluppiamo analiticamente la condizione (5.11); indicate con x, y le coordinate di P si ottiene: $\sqrt{x^2 + (y - p/2)^2} = |y + p/2|$ cioè:

$$(5.12) \quad x^2 = 2py \quad \text{equazione canonica della parabola.}$$

Abbiamo così introdotto i tre tipi di *coniche* (non degeneri) le *ellissi*, le *iperboli* e le *parabole* come luoghi geometrici e ne abbiamo trovato "equazioni canoniche" cioè relative ad una particolare scelta del riferimento ortonormale.

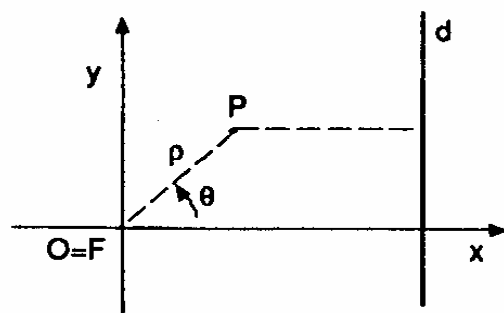
Osserviamo che anche l'iperbole e l'ellisse possono essere definite facendo uso di un fuoco F e di una direttrice d . I tre tipi di coniche indicati appaiono come il luogo dei punti P per i quali è costante il rapporto delle distanze dal fuoco e dalla direttrice:

$$(5.13) \quad \frac{d(P, F)}{d(P, d)} = e,$$

dove la costante e prende il nome di *eccentricità* della conica e la conica stessa è una ellisse se $e < 1$, una iperbole se $e > 1$ e una parabola se $e = 1$. Il caso $e = 1$ è stato appena trattato; nel caso $e \neq 1$ per vedere l'equivalenza di (5.13) con (5.9) o (5.10) basta fissare il riferimento in modo che la retta d abbia equazione $x = a^2/c$, $F = (c, 0)$ e l'eccentricità $e = c/a$. Lasciamo questi calcoli allo studente.

L'EQUAZIONE POLARE DELL'ELLISSE. Supponiamo l'ellisse assegnata tramite un fuoco F e la corrispondente direttrice d e fissiamo il riferimento

$RC(O, x, y)$ in modo tale che $O = F$ e l'asse x sia orientato da O verso d ; in questo modo d ha equazione $x = h$ con $h > 0$. Indicati con ρ il modulo del vettore OP e con θ l'angolo che esso forma con la direzione positiva dell'asse x , si ha $d(P, F) = \rho$ e $d(P, d) = h - \rho \cos \theta$.



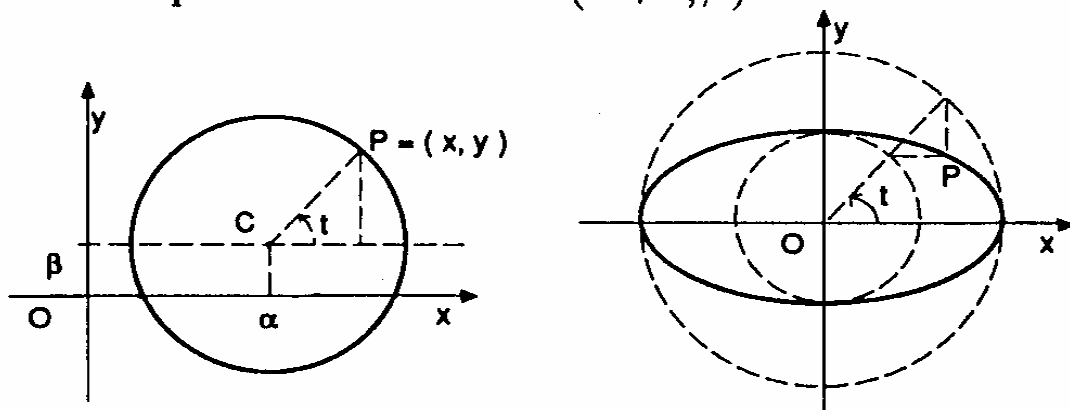
Sostituendo in (5.13) e ricavando ρ si ottiene:

$$(5.14) \quad \rho = \frac{eh}{1 + e \cos \theta}, \quad 0 < e < 1, \quad h > 0.$$

EQUAZIONI (PARAMETRICHE) DI UNA CIRCONFERENZA. I punti di una circonferenza di centro $C = (\alpha, \beta)$ e raggio r hanno coordinate x, y tali che:

$$(5.15) \quad \begin{array}{ll} x - \alpha = r \cos t & \text{ovvero} \quad x = \alpha + r \cos t \\ y - \beta = r \sin t & y = \beta + r \sin t \end{array} \quad (t \text{ parametro reale}).$$

Eliminando il parametro angolare t fra le due equazioni (2.14) si ottiene l'equazione (2.1). Al variare di t si ottengono tutti e soli i punti della circonferenza assegnata anche se valori diversi del parametro danno luogo allo stesso punto della circonferenza: ad esempio per $t = 0$, $t = 2\pi$, $t = 4\pi$, etc. si ottiene il punto di coordinate $(\alpha + r, \beta)$.



EQUAZIONI (PARAMETRICHE) PER L'ELLISSE E L'IPERBOLE. Per l'ellisse e l'iperbole date rispettivamente dalle equazioni (2.9) e (2.10) si ottengono le equazioni parametriche:

$$(5.16) \quad \begin{array}{ll} x = a \cos t & (ellisse), \\ y = b \sin t & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x = a \cosh t & (iperbole) \\ y = b \sinh t & \end{array}$$

come si vede facilmente eliminando il parametro t : ricordiamo che le funzioni *coseno iperbolico* e *seno iperbolico* sono definite da:

$$(5.17) \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

e per esse vale la relazione fondamentale $(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$.

5.E Esercizi

Piano euclideo, riferimento $RC(O, x, y)$.

1. Dire quali delle seguenti equazioni corrispondono ad una circonferenza e determinarne centro e raggio:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 5y = 0; \quad 3x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 1 = 0; \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y + 6 = 0; \\ 3x^2 + 2y^2 - 3x + 2y = 0; \quad 15x^2 + 15y^2 + 10x + 1 = 0. \end{aligned}$$

2. Data l'equazione della circonferenza $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ determinare le condizioni cui devono soddisfare α, β, r affinché la circonferenza verifichi una delle seguenti condizioni:

(a) passi per l'origine; (b) sia tangente all'asse x ; (c) abbia il centro sull'asse y ; (d) abbia il centro sull'asse x e sia tangente all'asse y .

3. Scrivere, se esistono, equazioni per le rette passanti per il punto $(0, 1)$ e tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

4. Data la famiglia di circonferenze $3x^2 + 3y^2 - 4x - 2y + (5 - k) = 0$ determinare per quale valore del parametro reale k la circonferenza corrispondente è tangente alla retta $x - y - 2 = 0$.

5. Scrivere l'equazione della circonferenza verificante una delle seguenti condizioni:

(a) tangente all'asse y , avente raggio 3 e passante per $P_0 = (5, 0)$;
(b) passate per i tre punti $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$.

6. Scrivere equazioni per tutte le circonferenze che risultano simultaneamente tangenti alle due rette:

(a) $r: x - y = 0$, $s: x - y - 2 = 0$; (b) $p: 3x - 4y = 0$, $q: 3x + 4y + 1 = 0$.

2. Trovare i semiassi, i vertici ed i fuochi della conica $4x^2 + 9y^2 = 1$.
3. Trovare gli asintoti, i vertici ed i fuochi dell'iperbole $x^2 - y^2 = 12$.
Verificare che essa ha gli stessi fuochi dell'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 32$.

6. RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DI CURVE E SUPERFICI DELLO SPAZIO ORDINARIO DEFINITE FACENDO USO DI DISTANZE (O ANGOLI)

Nello spazio ordinario non vi sono solo rette e piani; più in generale vi sono curve e superfici (che non sono necessariamente rette o piani). Alcune di esse possono essere definite facendo uso della nozione di distanza, quali per esempio la sfera, la circonferenza, etc.. Per determinare una loro rappresentazione analitica faremo quindi uso di un riferimento cartesianoortonormale $RC(O, x, y, z)$ aspettandoci, in analogia al caso delle rette dei piani, di trovare sia equazioni cartesiane che parametriche.

EQUAZIONE (CARTESIANA) DI UNA SFERA. La sfera (superficie sferica) di centro il punto $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ e raggio r è il luogo dei punti $Q = (x, y, z)$ la cui distanza da C è pari al raggio, pertanto deve aversi:

$$(6.1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2 \quad \text{equazione della sfera di centro e raggio assegnati.}$$

Sviluppando la (6.1) si ottiene un'equazione del tipo:

$$(6.2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \quad \text{equazione generale della sfera}$$

dove le coordinate del centro ed il raggio si ricavano da:

$$(6.2') \quad a = -2\alpha, \quad b = -2\beta, \quad c = -2\gamma, \quad d = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2.$$

Notiamo che l'equazione (6.2) non sempre rappresenta una sfera, infatti la (6.2) si risale a (6.1) se e solo se:

$$(6.3) \quad a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0.$$

In ogni caso i coefficienti reali che figurano in (6.2) sono essenziali e quindi le sfere costituiscono un sistema lineare ∞^4 di superfici dello spazio.

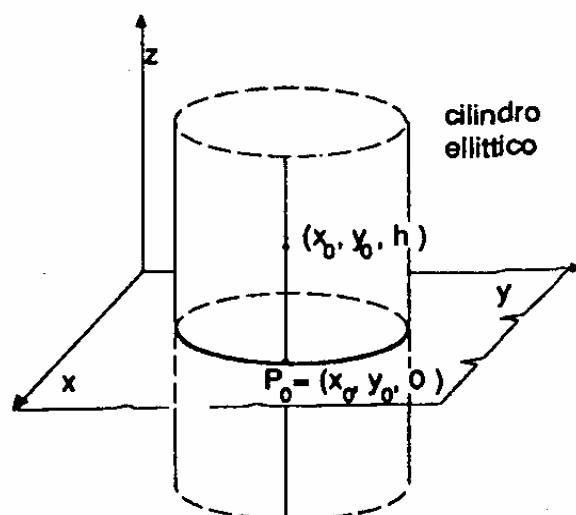
EQUAZIONE (CARTESIANA) DI UN CILINDRO CIRCOLARE RETTO CON GENERATRICI PARALLELE ALL'ASSE z . Nello spazio una qualunque delle equazioni:

$$(6.4) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

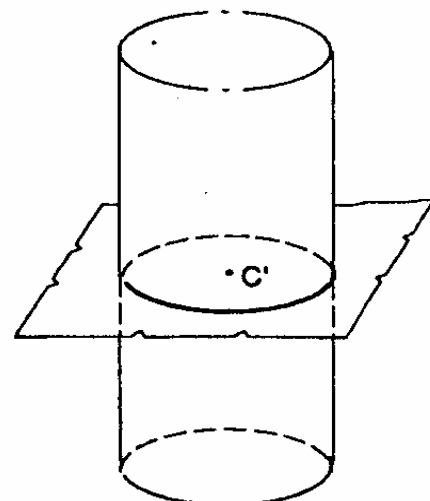
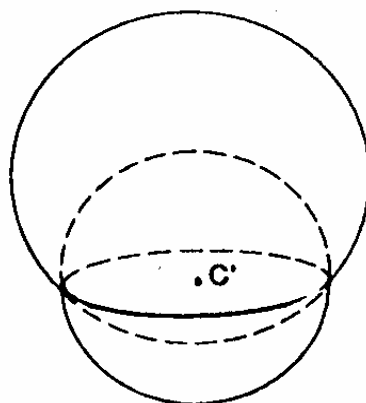
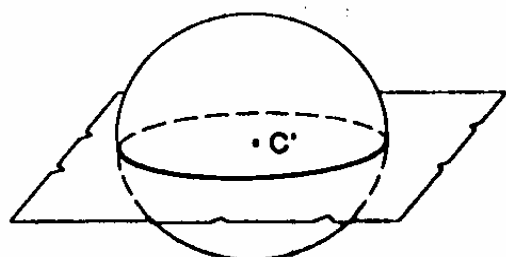
$$(6.5) \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 - 4c > 0,$$

rappresenta un cilindro del tipo indicato in quanto, non figurando in tali equazioni la variabile z , esso appare come luogo di rette parallele all'asse z che incontrano il piano x, y nella circonferenza di equazione (5.1) ovvero (5.2).

Da quanto visto è chiaro che l'equazione canonica di una ellisse, iperbole o parabola, date nella sezione 2., nello spazio si interpreta come l'equazione canonica di un cilindro retto (con generatrici parallele all'asse z e sezione col piano $z = 0$ l'ellisse, l'iperbole o la parabola) che viene detto rispettivamente *cilindro ellittico*, *cilindro iperbolico*, *cilindro parabolico*.



EQUAZIONI (CARTESIANE) DI UNA CIRCONFERENZA NELLO SPAZIO. Come curva dello spazio una circonferenza è determinata dall'intersezione di due superfici passanti per essa. La scelta di queste due superfici è largamente arbitraria (così come è arbitraria la scelta di due piani per rappresentare una retta). Essa si può rappresentare come intersezione di una sfera con un piano (la circonferenza è una curva piana!), oppure come intersezione di due sfere, o ancora come intersezione di un cilindro circolare retto con un piano ortogonale all'asse, etc..

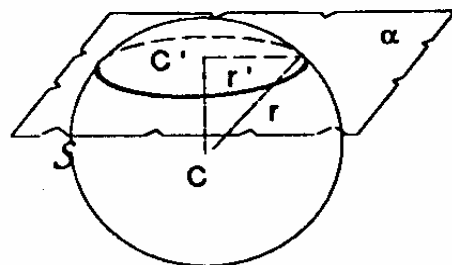


Conviene qui osservare che la forma analiticamente più conveniente è quella data dal sistema:

$$(6.6) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d &= 0 && (\text{sfera } S) \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta &= 0 && (\text{piano } \alpha) \end{aligned}$$

in quanto è facile ricavare le coordinate del centro C' ed il raggio r' di questa circonferenza (supposta esistente!) a partire dal centro C e dal raggio r della sfera S . C' è il punto di intersezione del piano α con la perpendicolare ad esso condotta dal centro C ; $r' = \sqrt{r^2 - d(C, \alpha)^2}$.

Chiaramente il sistema (6.6) nel campo reale non rappresenta una circonferenza non appena la distanza $d(C, \alpha)$ risulta maggiore o uguale al raggio della sfera; (nel primo caso si ottiene l'insieme vuoto, nel secondo un punto che è il punto di tangenza di α con S).



6.7 ESERCIZIO. a) Provare che la curva C rappresentata dalle equazioni $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 0$, $x + 3y - z = 0$ è una circonferenza.

b) Determinare equazioni cartesiane per la curva C' proiezione ortogonale di C sul piano $z = 0$.

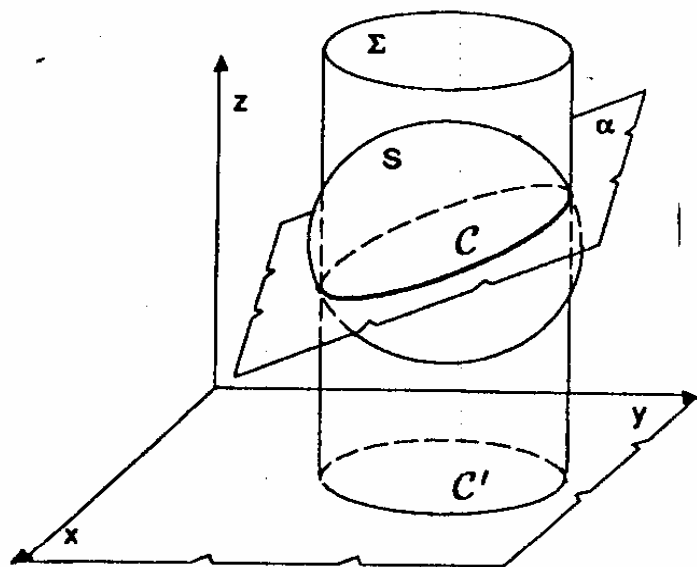
La prima delle equazioni rappresenta la sfera S di centro $(2, -1, 0)$ e raggio $\sqrt{5}$. La distanza del centro della sfera dal piano $\alpha: x + 3y - z = 0$ è $1/\sqrt{11}$ pertanto il sistema dato rappresenta una circonferenza. La prima domanda ha quindi risposta affermativa e lo studente può ora determinare il centro ed il raggio di C con il metodo geometrico da noi suggerito.

Molto spesso lo studente cerca di far "sparire" una variabile nel vano tentativo di applicare le formule della circonferenza del piano x, y . In pratica esegue il seguente calcolo: ricava $z = x + 3y$ dall'equazione del piano α e sostituisce nell'equazione della sfera ottenendo:

$$x^2 + y^2 + (x + 3y)^2 - 4x + 2y = 0.$$

Osserviamo che quest'ultima equazione interpretata nel piano x, y non rappresenta l'equazione di una circonferenza (perché?); interpretata nello spazio rappresenta un cilindro Σ con generatrici parallele all'asse z , in quanto manca la variabile z . Cosa abbiamo dunque ottenuto?

Il sistema $x^2 + y^2 + (x+3y) - 4x + 2y = 0$, $x + 3y - z = 0$ è equivalente al sistema di partenza e quindi rappresenta la stessa circonferenza C come intersezione del cilindro Σ con il piano α . Da questa rappresentazione sfortunatamente non siamo più in grado di dedurre il raggio. Questo passaggio algebrico così invitante è quindi sempre inutile? Di fatto è ciò che permette di risolvere il problema b). Infatti la *proiezione ortogonale* della curva C sul piano x, y si effettua determinando il cilindro Σ con generatrici parallele all'asse z e passante per C e sezionandolo con il piano $z = 0$. La curva C' ha equazioni $x^2 + y^2 + (x+3y)^2 - 4x + 2y = 0$, $z = 0$.

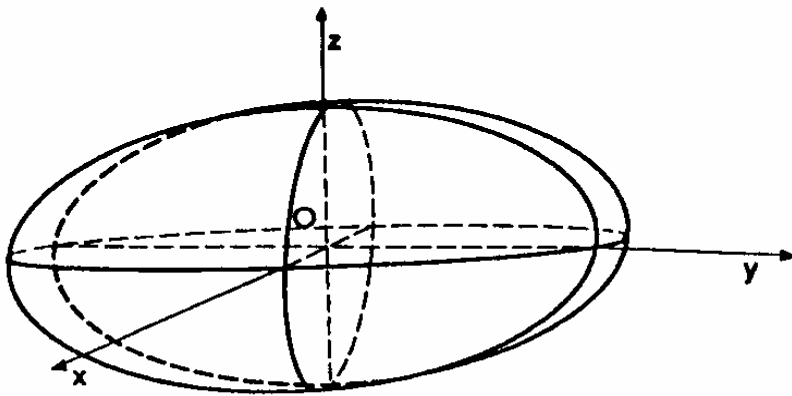


EQUAZIONI (CARTESIANE) CANONICHE DELLE QUADRICHE NON DEGENERI. Si tratta di superfici che sono la naturale generalizzazione delle coniche nel piano ed hanno anche esse una definizione geometrica. Noi presentiamo qui direttamente le equazioni dalle quali l'analogia con le coniche risulta evidente:

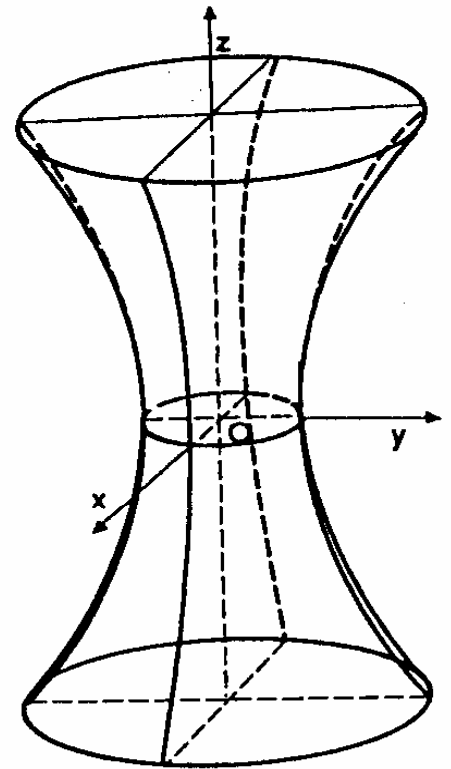
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$a \geq b \geq c$	<i>ellissoide reale</i>
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$a \geq b$	<i>iperboloide iperbolico</i>
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$b \geq c$	<i>iperboloide ellittico</i>
$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$	$p \geq q$	<i>paraboloide iperbolico</i>
$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$	$p \geq q$	<i>paraboloide ellittico</i>

dove i parametri a, b, c, p, q sono reali positivi.

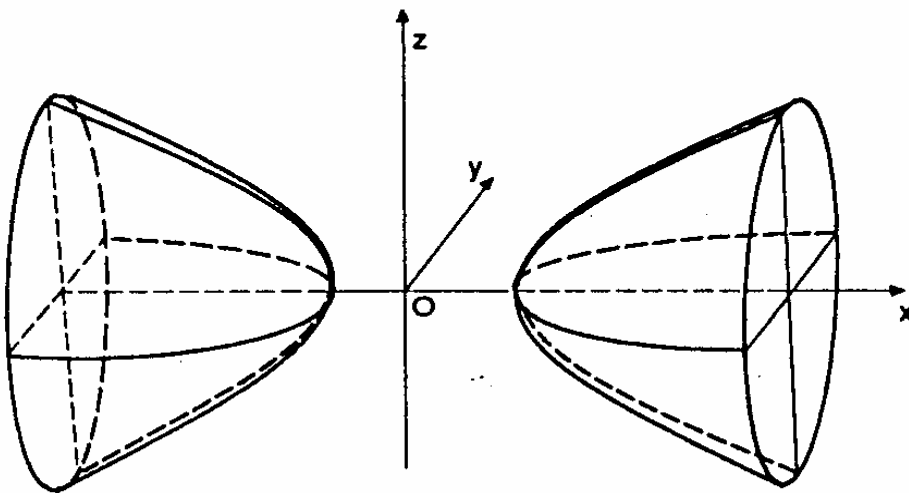
L'ellissoide reale è una superficie limitata in quanto per le coordinate dei suoi punti devono valere le disuguaglianze $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$ e quindi tale superficie è contenuta nel parallelepipedo centrato nell'origine e di lati rispettivamente $2a$, $2b$, $2c$. Basta studiarne le sezioni con i piani coordinati $x=0$, $y=0$, $z=0$ per ottenere ellissi in forma canonica.



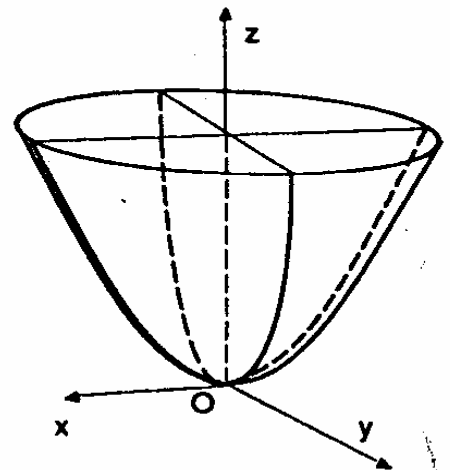
ellissoide reale



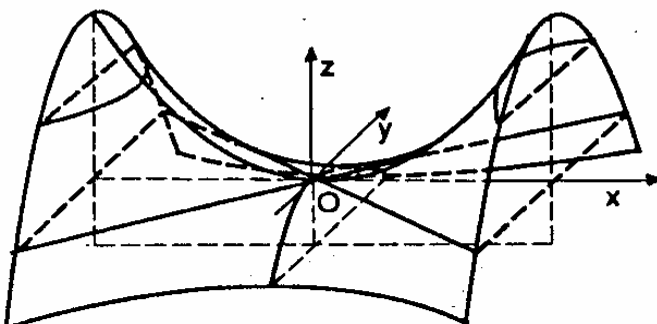
iperboloide iperbolico



iperboloide ellittico



paraboloide ellittico



paraboloide iperbolico

D'altra parte le sezioni con i piani $z = k$ hanno equazioni $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 - k^2/c^2$, $z = k$ e rappresentano ellissi per $|k| < c$. Le sezioni con i piani $x = k$ e $y = k$ hanno un comportamento del tutto analogo. Tutte le rimanenti equazioni corrispondono invece a superfici illimitate, come si vede subito osservando che pur di prendere x e/o y molto grandi, la z è molto grande. Per ciascuna di esse si possono studiare le sezioni con i piani paralleli ai piani coordinati. Per esempio le sezioni dell'iperboloide iperbolico coi piani $y = k$ hanno su di esso equazione $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1 - k^2/b^2$ e sono quindi iperboli per $|k| < b$. Dallo studio delle sezioni si deducono i grafici dati in figura.

Vogliamo infine mettere in evidenza che l'iperboloide ed il paraboloide iperbolici posseggono ciascuno due sistemi di rette, o, come si dice, sono *quadriche rigate*. Per l'iperboloide iperbolico osserviamo che la sua equazione si può scrivere nel modo seguente: $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1 - y^2/b^2$ e quindi $(x/a + z/c)(x/a - z/c) = (1 + y/b)(1 - y/b)$.

Si ottengono i seguenti sistemi di rette:

$$r_t: \begin{cases} x/a + z/c = t(1 + y/b) \\ x/a - z/c = (1/t)(1 - y/b) \end{cases}$$

$$s_\tau: \begin{cases} x/a + z/c = \tau(1 - y/b) \\ x/a - z/c = (1/\tau)(1 + y/b) \end{cases}$$

È subito visto che tali rette appartengono alla quadrica, basta infatti eliminare il parametro t , ovvero τ , per riottenere l'equazione della superficie. Per il paraboloide iperbolico basta riscrivere l'equazione nella forma $(x/a + y/b)(x/a - y/b) = 2z$, dove $p = a^2$ e $q = b^2$; con lo stesso trucco algebrico del caso precedente otteniamo i due sistemi di rette:

$$r_t: \begin{cases} x/a + y/b = 2tz \\ x/a - y/b = 1/t \end{cases}, \quad s_\tau: \begin{cases} x/a + y/b = 1/\tau \\ x/a - y/c = 2\tau z \end{cases}$$

6.E Esercizi

Spazio euclideo, riferimento $RC(O, x, y, z)$.

1. Decidere quali delle seguenti equazioni rappresentano una sfera e trovarne centro e raggio:

- (a) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - x + 6y + 9 = 0$,
 (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - z + 2 = 0$,
 (c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x + y - z + 4 = 0$.

2. Dato il fascio di piani paralleli al piano $x + y + z = 0$, determinare equazioni cartesiane per quelli che risultano tangenti alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ e determinare i punti di tangenza.

3. Determinare, se esistono, i piani tangenti alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z = 0$ passanti per la retta r di equazioni $x = 2t + 1$, $y = t - 2$, $z = -t + 1$.

4. Scrivere equazioni per tutte le sfere di raggio 3 che risultano tangenti al piano $x = 0$ e passano per i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$.

5. Dire se i seguenti sistemi di equazioni rappresentano una circonferenza ed in caso affermativo determinarne il centro, il raggio e la proiezione ortogonale sul piano $x = 0$:

$$(a) \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4 \\ x - y + z = 0 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0 \\ 3x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

6. Trovare il centro ed il raggio della circonferenza di equazioni $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ e determinare equazioni per la retta tangente alla circonferenza nel punto $P = (0, 0, 1)$.

7. Determinare equazioni per la circonferenza di centro il punto C di coordinate $(1, 1, 0)$ e tangente alla retta s di equazioni $x = t$, $y = 2t$, $z = -t$.

8. Determinare equazioni per tutte le sfere passanti per i punti $(1, 0, 1)$, $(-1, 2, 1)$, $(0, 2, -1)$.

9. Determinare equazioni per la circonferenza passante per i punti $(1, 0, 1)$, $(-1, 2, 1)$, $(0, 2, -1)$.

7. ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

ESERCIZIO I.

Nello spazio euclideo si consideri il riferimento cartesiano $RC(O, i, j, k)$. Verifichi che le rette $r_1 : x = t, y = t, z = 2t$; $r_2 : x + y = 0, z = 0$; $r_3 : x + z = 0, y + z = 0$ sono a due a due ortogonali e si considerino

i versori i', j', k' di r_1, r_2, r_3 rispettivamente, orientati nel verso delle y crescenti.

Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ si consideri la trasformazione lineare $T: \mathcal{V}_O \rightarrow \mathcal{V}_O$ definita da $T(i') = i'$, $T(j') = j'$, $T(k') = 3k'$. Determinare la matrice associata a T nella base i, j, k .

2. Nel riferimento $RA(O, x, y, z)$ dello spazio si considerino le rette r di equazioni $y - 1 = z - 1 = 0$, s di equazioni $3x + 2y - 3 = z + 1 = 0$, q di equazioni $x = 1, y = t, z = 0$. Determinare le rette che incontrano simultaneamente le rette r, s, q e l'asse z .

3. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ sia $L_1 = \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ e $L_2 = \text{Span}(w_1, w_2, w_3)$, dove:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Verificare che $\mathbb{R}^4 = L_1 \oplus L_2$ e decomporre il vettore z di componenti 1, 5, 4, 0 come somma di due vettori rispettivamente di L_1 ed L_2 .

ESERCIZIO II.

1. Nello spazio euclideo si consideri il riferimento $RA(O, i, j, k)$ e l'applicazione $f: \mathcal{V}_O \rightarrow \mathcal{V}_O$ definita da $f(xi + yj + zk) = (z - y)i + yj + zk$.

(a) Provare che f è lineare.

(b) Determinare $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$ e le rispettive dimensioni.

(c) Detto $P = (x, y, z)$ un punto qualunque dello spazio, sia P' il punto ottenuto proiettando P sul piano $\alpha: x + y - z = 0$ parallelamente all'asse x . Provare che $f(OP) = OP'$.

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) Il determinante è una funzione lineare sullo spazio vettoriale delle matrici.

(b) Il determinante è una funzione lineare in ciascuno dei vettori colonna della matrice.

(c) per ogni coppia di matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vale la formula:

$$\det(A + B) + \det(A - B) = \det(A) + \det(B).$$

3. Si consideri lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ e sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 2 \end{bmatrix}$, dove $s \in \mathbb{R}$. Provare che il sottoinsieme $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid XA = (s+1)X\}$ è un sottospazio per ogni valore di s e calcolarne la dimensione.

ESERCIZIO III.

1. Nel riferimento cartesiano $RC(O, x, y, z)$ dello spazio euclideo si consideri la retta r di equazioni $x = 1 + t$, $y = -2t$, $z = 3 - t$ ed il piano β di equazione $x + y - 5 = 0$. Determinare l'equazione dei piani passanti per r che formano un angolo di $\pi/3$ con il piano β .
2. Negli spazi vettoriali $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^4$ rispettivamente si considerino i vettori:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}, u_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, u_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}; v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, v_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, v_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, v_4 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

- (a) Dire, giustificando la risposta, se le condizioni $T(u_1) = v_1 - v_3$, $T(u_2) = v_2 + v_4$, $T(u_3) = v_2 - v_4$ permettono di definire una trasformazione lineare $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$.
- (b) In caso affermativo dire se T è iniettiva e/o suriettiva e, indicato con W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di equazioni $y_1 + y_2 - 2y_3 = 0$, $y_4 = 0$, determinare una base per $Im(T) \cap W$.
3. Nello spazio $\mathcal{E}^3$ è assegnato il riferimento cartesiano $RC(O, x, y, z)$, il punto $P = (0, 4, -3)$ e la sfera Σ di centro $C = (0, 1, 1)$ e raggio $r = 3$. Provare che il luogo $\mathcal{C}$ dei punti $Q \in \Sigma$ tali che la retta t passante per i punti P e Q sia tangente a Σ è una circonferenza di cui si chiede il centro ed il raggio.



Capitolo 7

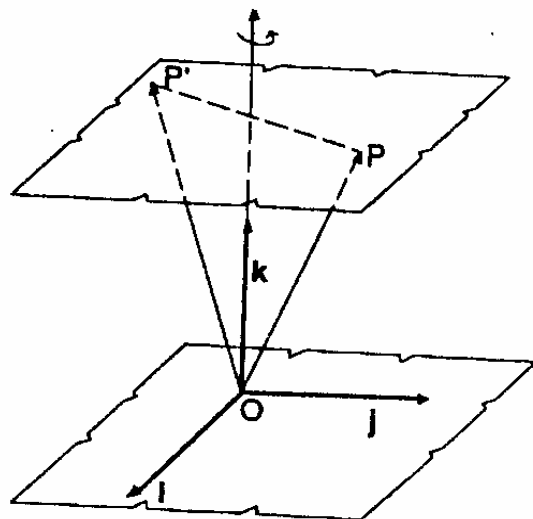
DIAGONALIZZAZIONE DELLE MATRICI

INTRODUZIONE. In questo capitolo introduciamo, a partire dallo studio di alcuni esempi, la nozione di "autovettore" e del corrispondente "autovalore" per un endomorfismo. Dopo aver messo in evidenza i problemi algebrici che intervengono per la ricerca degli autovalori e che dipendono dal campo K degli scalari, diamo una condizione necessaria e sufficiente perché un operatore lineare $T : V \rightarrow V$ sia "diagonalizzabile" sui complessi. Nel caso che l'operatore T , sullo spazio reale V , abbia autovalori reali lo stesso criterio fornisce la diagonalizzabilità sui reali. Da ultimo discutiamo il problema della diagonalizzazione simultanea di due matrici.

1. AUTOVALORI ED AUTOVETTORI DI UN ENDOMORFISMO

Sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V di dimensione finita n su $\mathbb{R}$. Esso trasforma, con legge lineare, ogni vettore $v \in V$ in un altro vettore $T(v) \in V$ e quindi, in "senso fisico", T "muove" i vettori dello spazio V ; noi siamo interessati a vedere se esistono vettori che, a trasformazione avvenuta, non hanno cambiato la loro "direzione". Consideriamo inizialmente alcuni esempi.

1.1 ESEMPIO. Nello spazio tridimensionale V_0 fissiamo una base ortonormale i, j, k e consideriamo la trasformazione lineare che consiste nel ruotare ogni vettore OP attorno all'asse generato da k di un angolo pari a π , fino a portarsi nella posizione $T(OP) = OP'$. Osserviamo che vi sono vettori particolari che non cambiano di direzione; per esempio abbiamo:



$$(1.1') \quad T(i) = -i, \quad T(j) = -j, \quad T(k) = k.$$

Naturalmente tutti i vettori dello spazio generato da i, j si mutano nel proprio opposto e tutti i vettori della retta generata da k sono fissi.

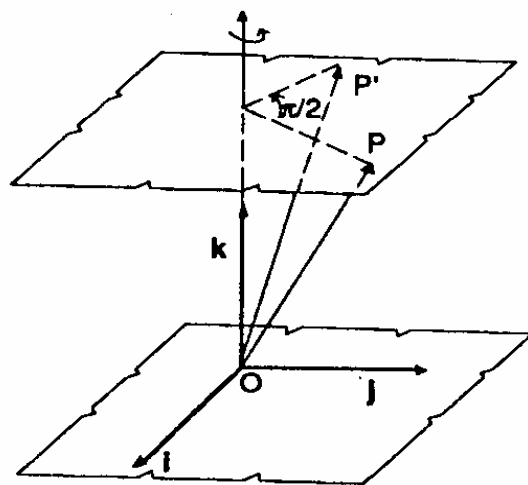
La matrice che rappresenta l'endomorfismo T nella base i, j, k è particolarmente semplice in quanto assume la forma diagonale:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

♡

1.2 ESEMPIO. Consideriamo lo stesso spazio dell'esempio precedente ma esaminiamo ora la trasformazione lineare T che consiste nel ruotare ogni vettore attorno alla retta generata da k di un angolo pari a $\pi/2$ in senso antiorario. Chiaramente per k vale la relazione:

$$(1.2') \quad T(k) = k,$$



ed ogni vettore della retta da esso generata è mutato in sé. D'altra parte ogni altro vettore dello spazio cambia di direzione. ♡

Allo studente può venire in mente che la presenza di questi vettori "speciali" dipenda dalle condizioni metriche (angolari) con cui abbiamo definito la trasformazione T nei due esempi precedenti. Ciò non è vero! Consideriamo infatti il seguente:

1.3 ESEMPIO. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'endomorfismo T che (nella base canonica) si scrive con le equazioni:

$$x' = (3/2)x - (1/2)y$$

$$y' = -(1/2)x + (3/2)y$$

di matrice $\begin{vmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{vmatrix}.$

Osserviamo che valgono le seguenti:

$$(1.3') \quad T\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad T\left(\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}\right) = 2 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix},$$

ove il primo vettore indicato è trasformato in sé (e così tutti i vettori del sottospazio da esso generato), il secondo vettore si muta nel suo multiplo secondo il fattore 2 (e così tutti i vettori del sottospazio da esso generato). I due vettori indicati sono indipendenti e, se usiamo questa base, la matrice associata alla trasformazione si semplifica notevolmente rispetto alla matrice iniziale; infatti essa è di forma diagonale:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

♡

Abbiamo affermato che questo esempio non è di natura metrica, perché?.

1.4 ESEMPIO. Consideriamo infine la trasformazione lineare dello spazio bidimensionale $\mathcal{V}_0$ in sé che consiste nel ruotare ciascun vettore di un angolo pari a $\pi/4$ in verso antiorario. Qui ogni vettore si trasforma in un altro che ha certamente diversa direzione, quindi non esistono vettori speciali del tipo messo in evidenza negli esempi precedenti. ♡

Questi esempi in ogni caso giustificano la seguente:

1.5 Definizione. Sia $T: V \rightarrow V$ una trasformazione lineare dello spazio V di dimensione finita n sul campo K . Si dice che il vettore non nullo $v \in V$ è un autovettore per l'endomorfismo T , corrispondente all'autovalore $\lambda \in K$, se vale la relazione:

$$(1.5') \quad T(v) = \lambda v.$$

Per ogni autovalore λ di T si chiama autospazio V_λ di peso λ il sottospazio definito da:

$$(1.5'') \quad V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}.$$

♣

Lasciamo allo studente, per esercizio, la verifica che il sottoinsieme definito in (1.5'') è un sottospazio di V (cfr. 4.10 del capitolo 1).

Notiamo che tutti i vettori *non nulli* di V_λ sono autovettori di peso λ . Nell'esempio 1.1 i vettori i, j sono due autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -1$; l'autospazio corrispondente V_{-1} è bidimensionale essendo generato da i e j . Il vettore k è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 1$ e l'autospazio V_1 è unidimensionale. Nell'esempio 1.2 vi è un solo autovettore indipendente (relativo all'autovalore 1) e l'autospazio corrispondente V_1 è unidimensionale. Nell'esempio 1.3 vi sono due autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ e gli autospazi corrispondenti V_1 e V_2 sono unidimensionali. Nell'esempio 1.4 non vi sono autovettori.

È chiaro dagli esempi che non è detto esista anche un solo autovettore (ed il corrispondente autovalore), almeno per spazi vettoriali sui reali! Quello che non è affatto chiaro è perché in alcuni degli esempi siamo stati in grado di trovare una *base* di autovettori ed in altri no. Ne abbiamo visto comunque le conseguenze: se vi è una base di autovettori la matrice della trasformazione si semplifica nella "forma diagonale".

1.6 PROBLEMA. *Data una trasformazione lineare $T : V \longrightarrow V$ sul campo K esiste una base rispetto alla quale essa si scriva con una matrice diagonale? In quali casi ciò è possibile o, in altri termini, quando è che l'operatore è diagonalizzabile?* ♥

La risposta alle domande è fornita dalla seguente:

1.7 Proposizione. *Sia $T : V \longrightarrow V$ una trasformazione lineare (sul campo K); se V ammette una base di autovettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ di T , di autovalori rispettivamente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, allora la matrice di T in questa base è la matrice diagonale Λ i cui elementi sono ordinatamente gli autovalori e viceversa.*

Dim. Se si ha una base di autovettori di T per essi risulta:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1, T(v_2) = \lambda_2 v_2, \dots, T(v_n) = \lambda_n v_n,$$

e la matrice è della forma indicata.

Viceversa, se in una base $v_1, v_2, \dots, v_n$ la matrice di T si scrive nella forma diagonale:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

necessariamente ogni vettore v_i è un autovettore di autovalore λ_i . Infatti, nelle coordinate della base indicata, la trasformazione opera sulle coordinate per moltiplicazione a sinistra e le coordinate del vettore v_i sono tutte nulle tranne la i -ma che vale 1. Se ne deduce che v_i viene trasformato in $\lambda_i v_i$; questo prova la tesi. ♣

La diagonalizzazione di un endomorfismo T è quindi legata all'esistenza meno di una base di autovettori. In quali casi esiste una tale base? Potremo dare una risposta affermativa solo nel caso di classi di operatori speciali ed in ogni caso dovremo riformulare il problema precisando il campo degli scalari che vogliamo (o dobbiamo) usare, come vedremo nella prossima sezione.

Per semplicità ci limiteremo al caso in cui $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Lo stesso tipo di problematica può essere rifrasedo in termini di matrici.

1.8 PROBLEMA. *Sia A una matrice di ordine n (reale o complessa) e consideriamo la sua classe coniugata $\mathcal{O}_A$, definita in 4.14 del capitolo 5. Quando è che in $\mathcal{O}_A$ esiste una matrice diagonale?* ♥

È questo il problema della diagonalizzazione di una matrice.

Esplicitamente, data una matrice A di ordine n (reale o complessa) ci si chiede quando esista una matrice invertibile C (dello stesso ordine e rispettivamente reale o complessa) tale che $C^{-1}AC = \Lambda$, dove Λ è una matrice diagonale. Se ciò è possibile la matrice Λ si chiama *forma diagonale* di A e la matrice C è una *matrice diagonalizzante*.

L'equivalenza del problema posto in termini di operatori o di matrici è chiara (cfr. proposizione 4.10 del capitolo 5).

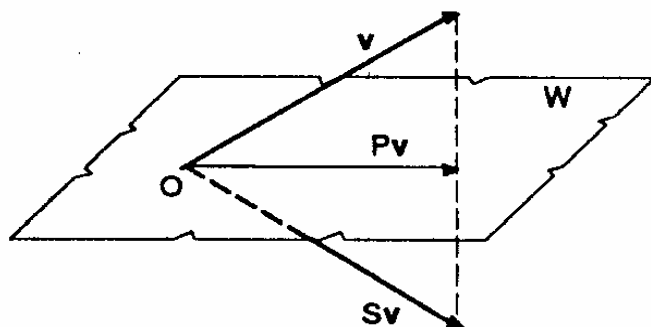
La matrice diagonalizzante C , se esiste, ha per colonne le coordinate di una base di autovettori. Nella sezione 2 vedremo che gli autovalori sono univocamente determinati (su C) e l'ordine con cui figurano in Λ dipende dall'ordine scelto per gli autovettori; Λ è quindi *unica* a meno dell'ordine con cui figurano gli elementi sulla diagonale. Per la matrice diagonalizzante vi è invece arbitrarietà di scelta in quanto si può, per esempio, sostituire ciascun autovettore con un suo multiplo.

1.9 OSSERVAZIONE. In 3.18 del capitolo 1 abbiamo visto che una matrice A non singolare può essere messa in forma diagonale facendo uso dell'eliminazione di Gauss. Il problema che ci stiamo proponendo qui ha lo stesso scopo (anche se per matrici quadrate qualunque); ma il metodo che vogliamo ora usare è concettualmente diverso da quello del Capitolo 1. Infatti l'eliminazione di Gauss opera solo sulle righe della matrice iniziale mentre la coniugazione opera sia sulle righe che sulle colonne, per effetto di una moltiplicazione sia a sinistra che a destra. ♡

1.E Esercizi

1. Sia W un sottospazio di dimensione 2 dello spazio $\mathcal{V}_O$ ($\dim(\mathcal{V}_O)=3$) e si consideri la trasformazione lineare $P_W = P : \mathcal{V}_O \rightarrow \mathcal{V}_O$ che ad ogni vettore $v \in \mathcal{V}_O$ associa il vettore $v' = Pv$ proiezione ortogonale di v su W (cfr. 2.1, capitolo 6). Determinare gli autospazi di tale trasformazione e la loro dimensione. Determinare, se possibile, una base di autovettori. Tale base è unica?

2. Si consideri l'operatore di *simmetria* $S_W = S : \mathcal{V}_O \rightarrow \mathcal{V}_O$ che associa ad ogni vettore $v \in \mathcal{V}_O$ il vettore $v' = Sv$ simmetrico di v rispetto al piano W . Determinare, se possibile, una base di autovettori. Tale base è unica?



2. DETERMINAZIONE ANALITICA DEGLI AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

Consideriamo una trasformazione lineare $T : V \rightarrow V$ sul campo K e preoccupiamoci di trovare gli eventuali autovettori ed autovalori; poiché questi dipendono dalla trasformazione possiamo far uso di una base qualunque, rispetto alla quale T si scrive (facendo uso delle coordinate) $y = Ax$. La condizione che definisce un autovettore ed il corrispondente autovalore (cfr. (1.5')) in termini di coordinate diventa: $Ax = \lambda x$ ovvero $Ax = \lambda Ix$ e quindi:

$$(2.1) \quad (A - \lambda I)x = 0.$$

Per ottenere un vettore non nullo x che soddisfi (2.1) occorre che il nucleo della matrice $A - \lambda I$ sia almeno di dimensione 1 e quindi la matrice $A - \lambda I$ deve essere singolare. In definitiva, prima di poter determinare eventuali autovettori, occorre determinare *preventivamente* i valori di λ per cui si ha:

$$(2.2) \quad \det(A - \lambda I) = 0.$$

Successivamente, per ogni valore λ_i soddisfacente (2.2) il sistema (2.1), calcolato per $\lambda = \lambda_i$, fornisce *equazioni cartesiane* del corrispondente autospazio V_{λ_i} la cui dimensione dipende dal rango della matrice $A - \lambda_i I$. Quest'ultima informazione è importante in quanto determina il numero massimo di autovettori indipendenti che si possono trovare in corrispondenza all'autovalore λ_i .

La (2.2) esplicitamente si scrive:

$$(2.2') \quad p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Calcoliamo questo determinante con la formula (2.4) del capitolo 3, scrivendo esplicitamente solo l'addendo che corrisponde alla permutazione identica e tralasciando tutti gli altri; infatti questo basta per calcolare il coefficiente di λ^n e di λ^{n-1} :

$$p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + \dots \text{ (altri termini)}$$

Ricordando che, se $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ il termine noto c_0 è dato da $c_0 = p(0)$, abbiamo che il termine noto del polinomio caratteristico è $p_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$ ed in definitiva risulta:

$$(2.2'') \quad p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A),$$

Il polinomio $p_A(\lambda)$ è di grado effettivo n e prende il nome di *polinomio caratteristico* della matrice A ; le sue radici forniscono gli autovalori di A . Esso di fatto dipende solo dalla trasformazione T e verrà spesso indicato anche con $p_T(\lambda)$, infatti si ha:

2.3 Proposizione. *Sia A una matrice e sia $B = C^{-1}AC$ una sua coniugata, allora risulta:*

$$(2.3') \quad p_A(\lambda) = p_B(\lambda).$$

Dim. $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}\lambda IC) = \det(C^{-1}(A - \lambda I)C) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda).$ ♣

La determinazione degli autovalori di T è quindi legata all'esistenza di soluzioni dell'equazione (2.2').

Riprendiamo l'esempio 1.2. La matrice della trasformazione rispetto alla base ortonormale i, j, k è data da:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

in quanto $T(i) = j$, $T(j) = -i$, $T(k) = k$. Il polinomio caratteristico è:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1)$$

ed esso ammette una sola radice reale $\lambda_1 = 1$. Le altre due radici sono complesse, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$; ma queste sfortunatamente non sono accettabili in quanto la nostra trasformazione è reale, opera cioè su uno spazio vettoriale reale dove ha senso solo la moltiplicazione per scalari reali e dove i vettori, qualunque base si sia fissata, hanno coordinate reali! Dobbiamo quindi concludere che la rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse generato da k ha il solo autovalore $\lambda_1 = 1$. Per esso possiamo ricercare il corrispondente autospazio V_1 le cui equazioni sono date dal sistema omogeneo (2.1):

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

e le soluzioni sono le terne $(0, 0, z)$ al variare del parametro z . Abbiamo ritrovato così i risultati che avevamo già visti geometricamente nella sezione 1: k è un autovettore di autovalore $\lambda_1 = 1$ e tutti gli altri autovettori sono suoi multipli. Quindi non esiste una base di autovettori e l'operatore, ovvero la matrice A , non si diagonalizza sui reali.

Se avessimo considerato la matrice A come un operatore su uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, ad esempio $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, avremmo ottenuto gli stessi

autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ e per questi ultimi due ha ora senso fare il calcolo dei corrispondenti autospazi. Esplicitamente per l'autovalore $\lambda_2 = i$ l'autospazio corrispondente è definito dalle equazioni:

$$\begin{vmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{aligned} -ix - y &= 0 \\ x - iy &= 0, \\ (1-i)z &= 0 \end{aligned}$$

ove le prime due equazioni sono equivalenti (basta moltiplicare ad esempio prima per i per ottenere la seconda) e quindi gli autovettori hanno coordinate $(iy, y, 0)$, al variare del parametro complesso y . In modo analogo per l'autovalore $\lambda_3 = -i$ si ottiene l'autospazio di equazioni $-iy = 0, z = 0$ e gli autovettori hanno coordinate $(-iy, y, 0)$, al variare del parametro complesso y . In questo caso abbiamo una base di autovettori costituita, per esempio, dai vettori k, v, w dove gli ultimi due hanno rispettivamente coordinate $(i, 1, 0)$ e $(-i, 1, 0)$; la matrice data *diagonalizza sui complessi!* La sua forma diagonale ed una matrice diagonalizzante sono rispettivamente:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Come si vede, per la stessa matrice abbiamo trovato una forma diagonale su $\mathbb{C}$ e non su $\mathbb{R}$! Questo è derivato dal fatto che alcuni degli autovalori sono complessi.

In generale, la determinazione degli autovalori di un endomorfismo T o di una matrice A , sul campo K è legata all'esistenza o meno, per l'equazione $p_A(\lambda) = 0$, di radici nel campo K . Vedremo nella prossima sezione cosa possiamo dire in merito, ma è chiaro dall'esempio svolto che dovremo riformulare il problema della diagonalizzazione precisando quanto non su quale campo vogliamo lavorare.

2. Esercizi

1. Sia A una matrice diagonale. Quali sono i suoi autovalori?
2. Sia A una matrice triangolare (superiore o inferiore); provare che i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale principale.
3. Sia A una matrice per la quale il vettore x è un autovettore di autovalore λ . Provare che A^2 ammette lo stesso autovettore con autovalore λ^2 . Cosa accade per $A^3, A^4, \dots$?

4. Supponiamo che la matrice A di ordine n ammetta l'autovalore $\lambda = 0$, qual'è l'autospazio corrispondente?
5. Dimostrare, senza far uso del polinomio caratteristico, che la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ammette l'autovalore $\lambda = 0$.

3. PROBLEMI ALGEBRICI RELATIVI ALLA RICERCA DEGLI AUTOVALORI

Rivediamo brevemente la teoria delle equazioni algebriche, cioè di quelle equazioni il cui primo membro è un polinomio.

Sia $p(x)$ un polinomio di grado effettivo n ed a coefficienti nel campo K . Si dice che $x_1 \in K$ è una *radice* di *molteplicità* $\nu \geq 1$ se:

- I) $p(x_1) = 0$,
 II) $p(x) = (x - x_1)^\nu q(x)$, dove $q(x)$ è un polinomio tale che $q(x_1) \neq 0$.

In breve, la molteplicità corrisponde all'avere la stessa radice ripetuta esattamente ν volte.

La presenza o meno di radici per $p(x)$ dipende dalla scelta del campo K . Se ci poniamo sui complessi vale il seguente *teorema fondamentale dell'algebra*, per la cui dimostrazione rimandiamo ai corsi successivi.

3.1 Teorema. *Un'equazione algebrica $p(x) = 0$ nel campo complesso ammette almeno una radice.* ♣

Proprio in virtù di questo teorema si dice che $\mathbb{C}$ è un campo algebricamente chiuso.

Notiamo che il teorema è falso se ci poniamo sui reali; infatti l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha radici reali. $\mathbb{R}$ non è un campo algebricamente chiuso!

Dal teorema 3.1 si deduce immediatamente il seguente:

3.2 Teorema. *Un'equazione algebrica di grado effettivo n ammette nel campo complesso esattamente n radici, pur di contare ciascuna di esse con la propria molteplicità.* ♣

Il discorso sulle molteplicità deve essere precisato. Supponiamo che le radici distinte siano $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k \leq n$) e le corrispondenti molteplicità siano $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$, il teorema afferma che $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$.

Nel caso che i coefficienti del polinomio siano *reali*, ma ci poniamo in $\mathbb{C}$, possiamo dire in più che le radici sono reali o complesse e che con ogni radice complessa vi è anche la radice complessa coniugata (con la stessa molteplicità).

Per quanto detto è chiaro che dobbiamo riformulare il problema della diagonalizzazione di una matrice, precisando quanto meno su quale campo vogliamo diagonalizzarla. Se A è una matrice complessa essa va considerata come un operatore in $\mathbb{C}^n$; se A è reale essa può essere considerata sia come operatore in $\mathbb{R}^n$ che in $\mathbb{C}^n$ ed il problema della diagonalizzazione può avere risposte differenti nei due casi.

Poiché abbiamo interesse a determinare, nel modo più ampio possibile, i tipi di matrici che sono diagonalizzabili, d'ora in poi useremo il campo complesso $\mathbb{C}$. Questo ci permette di garantire che il polinomio caratteristico di una matrice A di ordine n , sia essa reale o complessa, ammette n radici quindi la matrice ammette n autovalori anche se, attenzione!, essi non saranno in generale distinti.

A questo punto vi è ancora un tipo di difficoltà che vogliamo chiarire.

3.3 PROBLEMI DI CALCOLO. È vero che $p_A(\lambda) = 0$ ammette n radici distinte o coincidenti a gruppi, ma è sempre possibile calcolarle? Un conto è sapere che esistono, altro è saperle determinare!

Lo studente è certamente (?) in grado di risolvere le equazioni di primo e di secondo grado ed alcune equazioni "speciali" di grado superiore, per esempio equazioni biquadratiche, reciproche, etc., oppure equazioni il cui polinomio si fattorizzi con equazioni di questo tipo. Probabilmente non ha o non ha mai visto esplicitamente le *formule* risolutive dell'equazione generale di terzo e quarto grado. Esse esistono e sono formule che si calcolano a partire dai coefficienti dell'equazione eseguendo operazioni algebriche ed estrazioni di radici quadrate e cubiche sia nel primo caso, che nel secondo.

Cosa accade per l'equazione generale di grado $n \geq 5$? Di fatto è stato provato nel secolo scorso da Abel e Ruffini (in modo indipendente) che *non esistono* formule risolutive che permettano di calcolare le soluzioni a partire dai coefficienti ed operando con le quattro operazioni elementari e con estrazioni di radici.

Da qui spesso nasce l'impossibilità di calcolare gli autovalori di una matrice (e non per colpa dello studente!).

Vi sono naturalmente degli algoritmi (alcuni anche semplici) che permettono di calcolare numericamente tali autovalori; ma bisogna

intendersi: tale calcolo dà in ogni caso risultati approssimati. La cosa non è indolore in quanto, se gli autovalori sono approssimati, i corrispondenti vettori che si calcolano con la (2.1) non sono effettivi autovettori ed una eventuale diagonalizzazione che in questo modo ne venga fuori *non* è la diagonalizzazione della matrice data ma di una sua "perturbazione" (vedere, per esempio [B-C-M] della lista dei testi consigliati). ♥

Proprio per i motivi spiegati in 3.3 è importante poter avere *a priori* informazioni sugli autovalori di una matrice; per esempio si può provare che gli autovalori di una matrice simmetrica reale sono tutti reali.

3.E Esercizi

- 1) Calcolare gli autovalori della matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Decidere se essa è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ ed in caso affermativo scrivere la forma diagonale ed una matrice diagonalizzante.

- 2) Calcolare gli autovalori della matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2+i & 0 \\ 2-i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

e dire se essa è diagonalizzabile o meno. In caso affermativo determinare una base di autovettori.

- 3) Sia $A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; dire se essa è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$, su $\mathbf{C}$ oppure non è diagonalizzabile.

4. CASO DELL'ESISTENZA DI UNA BASE DI AUTOVETTORI

Sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo su $\mathbf{C}$; ci proponiamo di capire in quali casi si riesca a trovare una base di autovettori e quindi in quali casi l'operatore di diagonalizzi. Innanzi tutto abbiamo la seguente:

4.1 Proposizione. Se $v_1, v_2, \dots, v_h$ sono autovettori di T corrispondenti rispettivamente agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ e tali autovalori sono distinti, allora gli autovettori sono indipendenti.

Dim. La proposizione è vera nel caso di un solo autovettore in quanto esso, per definizione, è non nullo. Possiamo quindi procedere per induzione ammettendo che i primi $h-1$ autovettori siano linearmente indipendenti. Consideriamo l'equazione:

$$(*) \quad 0 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{h-1} \mathbf{v}_{h-1} + \alpha_h \mathbf{v}_h,$$

applicando la trasformazione T ad ambo i membri si ottiene:

$$(**) \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_{h-1} T(\mathbf{v}_{h-1}) + \alpha_h T(\mathbf{v}_h) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{h-1} \lambda_{h-1} \mathbf{v}_{h-1} + \alpha_h \lambda_h \mathbf{v}_h. \end{aligned}$$

Se moltiplichiamo la (*) per λ_h e sottraiamo (**) otteniamo:

$$\alpha_1(\lambda_h - \lambda_1) \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{h-1}(\lambda_h - \lambda_{h-1}) \mathbf{v}_{h-1} = 0$$

e per l'induzione ammessa tutti i coefficienti devono essere nulli. Poiché gli autovalori sono distinti risulta $\lambda_h - \lambda_i \neq 0$ per ogni $i=1, \dots, h-1$ e quindi deve aversi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{h-1} = 0$. Da (*) otteniamo quindi $\alpha_h = 0$. ♣

Una base di autovettori *esiste* quindi certamente nel caso in cui gli n autovalori siano tutti *distinti*: l'operatore (ed ogni matrice A che lo rappresenti) si diagonalizza. Infatti per ogni $i=1, \dots, n$ la matrice $A - \lambda_i I$ è singolare e quindi nel suo nucleo vi è almeno un vettore non nullo; determiniamo così n autovettori che, per la proposizione precedente, sono una base di V .

Cosa si può dire nel caso di autovalori ripetuti? È chiaro che gli autovettori vanno ricercati nei vari autospazi V_{λ_i} .

Consideriamo innanzi tutto il seguente:

4.2 ESEMPIO. Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

il suo polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2$ ed esso ammette la sola radice $\lambda=0$ con molteplicità 2. L'autospazio corrispondente ha equazione $y=0$ e quindi ha dimensione 1. In $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{C}^2$ non potremo mai trovare due vettori indipendenti che siano autovettori per la trasformazione. ♡

Questo esempio prova che il problema della diagonalizzazione ha, in generale, risposta negativa anche sui complessi.

D'ora in poi per ogni autovalore λ_i di T chiameremo molteplicità algebrica la sua molteplicità in quanto radice del polinomio caratteristico; chiameremo molteplicità geometrica la dimensione del corrispondente autospazio V_{λ_i} . Si ha:

4.3 Proposizione. Per ogni autovalore λ_i la molteplicità geometrica è minore o uguale alla molteplicità algebrica.

Dim. Indichiamo con ν_i la molteplicità algebrica e supponiamo, per assurdo, che $\dim(V_{\lambda_i}) = h$, con $h > \nu_i$. Sia $w_1, w_2, \dots, w_h$ una base per V_{λ_i} e completiamola ad una base di V . La trasformazione si scrive, in questa base, con la matrice:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & & & \\ \hline & & & & 0 & & \\ & & & & & & B \end{array} \right) \quad C$$

il cui polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^h p_B(\lambda)$ (perché?). Ma questo è assurdo in quanto in questo caso la molteplicità algebrica di λ_i è almeno h ed $h > \nu_i$. ♣

Se un autovalore λ_j ha molteplicità algebrica ν_j ed il corrispondente autospazio ha dimensione minore di ν_j la trasformazione non si diagonalizza. Vale infatti il seguente:

4.4 Teorema. Un operatore lineare $T : V \rightarrow V$ su $\mathbb{C}$, o una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, si diagonalizza se e solo se, detti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ i suoi autovalori distinti e di molteplicità algebrica rispettivamente $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$, per i corrispondenti autospazi si ha:

$$(4.5) \quad \dim(V_{\lambda_i}) = \nu_i \quad i = 1, 2, \dots, h.$$

Dim. Se la matrice è diagonalizzabile la (4.5) è immediata. Viceversa, se vale la (4.5), si deve in sostanza provare che, scegliendo per ogni autospazio V_{λ_i} una base, globalmente questi vettori forniscono una base di V .

Sia infatti:

$$\begin{array}{ll} u_1, \dots, u_{\nu_1} & \text{una base di } V_{\lambda_1}, \\ w_1, \dots, w_{\nu_2} & \text{una base di } V_{\lambda_2}, \\ \vdots & \\ v_1, \dots, v_{\nu_h} & \text{una base di } V_{\lambda_h} \end{array}$$

e supponiamo che si abbia:

$$0 = (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{\nu_1} u_{\nu_1}) + \dots + (\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{\nu_h} v_{\nu_h}) = z'_1 + \dots + z'_h$$

con coefficienti non tutti nulli (si è posto $z'_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{\nu_1} u_{\nu_1}$, $\dots$, $z'_h = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{\nu_h} v_{\nu_h}$). Il vettore z'_i appartiene all'autospazio V_{λ_i} e poiché la relazione $0 = z'_1 + \dots + z'_h$ implica la dipendenza dei vettori scritti, dalla proposizione 4.1 segue che non possono essere autovettori

e quindi ciascuno di essi deve essere il vettore nullo. Pertanto tutti i coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu_1}; \dots; \gamma_1, \dots, \gamma_{\nu_h}$ sono nulli, vista l'indipendenza dei vettori scelti in ciascun autospazio. ♣

4.6 OSSERVAZIONE. Supponiamo che la matrice A sia diagonalizzabile e si consideri una base come è stato indicato nel teorema 4.4. Per ogni vettore $v \in V$ si ha che:

$v = (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_{\nu_1} u_{\nu_1}) + \dots + (\delta_1 v_1 + \dots + \delta_{\nu_h} v_{\nu_h}) = z_1 + \dots + z_h$
dove gli z_i appartengono agli autospazi V_{λ_i} e la decomposizione data è unica (perché?). Questo equivale a dire che per lo spazio vettoriale V vale la *decomposizione in somma diretta*:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_h}.$$

♥

4.E Esercizi

1. Decidere se la matrice $A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ e, in caso affermativo, trovare la forma diagonale ed una matrice diagonalizzante.
2. Si consideri l'operatore lineare $T_k : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ (k parametro reale) definito da:

$$T(x, y, z) = (x + y, y, kz).$$

Determinare, al variare di k , la dimensione degli autospazi dell'operatore. Determinare, se esistono, valori di k per i quali l'operatore si diagonalizza.

3. Provare che la seguente matrice A è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ e scrivere per essa due differenti matrici diagonalizzanti:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. ANCORA SUGLI INVARIANTI PER CONIUGAZIONE

Ricordiamo che con la proposizione 2.3 abbiamo provato che il polinomio caratteristico di una matrice è *invariante per coniugazione*: se A e B sono coniugate allora $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$. In particolare sono *invarianti* tutti i *coefficienti* del polinomio caratteristico (i quali si calcolano a partire dagli elementi delle matrici A e B). Per il coefficiente di λ^{n-1} avremo (cfr. 2.2''):

$$(5.1) \quad a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn}.$$

Per il termine noto avremo:

$$(5.2) \quad \det(A) = \det(B),$$

cosa per altro già nota dalla 4.15 del capitolo 5.

5.3 Definizione. Per ogni matrice A si chiama traccia, e si indica con $tr(A)$, la somma degli elementi sulla diagonale principale. ♣

Possiamo quindi dire che la *traccia* è *invariante per coniugazione* e riscrivere la (5.1) nella forma:

$$(5.4) \quad tr(A) = tr(B).$$

Vogliamo ora vedere come questi invarianti sono legati, nel campo complesso, agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (che sono anch'essi invarianti per la classe coniugata $\mathcal{O}_A$). Il polinomio caratteristico può scriversi in funzione delle sue radici:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \lambda^{n-1} + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

Confrontando questa espressione con (2.2'') si ha:

$$(5.5) \quad tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \quad \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

L'importanza degli invarianti per coniugazione è già stata illustrata nell'esempio 4.16 del capitolo 5. Essi forniscono condizioni necessarie perchè due matrici siano coniugate. Che le condizioni siano necessarie ma in generale non sufficienti è messo in evidenza dal seguente:

5.6 ESEMPIO Le matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

hanno lo stesso polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$. Esse però non sono coniugate in quanto, se così fosse, rappresenterebbero, in basi diverse, lo stesso operatore diagonalizzabile $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, visto che A è diagonale; ma B non si diagonalizza perchè all'autovalore $\lambda = 1$, di molteplicità algebrica due, corrisponde l'autospazio di equazioni $x_2 = x_3 = 0$ che è unidimensionale.

5.E Esercizi

1. Sia A una matrice di ordine 2 tale che $\text{tr}(A) = 2$, $\det(A) = -1$. Scrivere il polinomio caratteristico di A e determinarne gli autovalori.
2. Data la seguente matrice A determinare, se possibile, gli autovalori senza far uso della formula risolutiva delle equazioni di terzo grado; in caso contrario determinare la loro somma ed il loro prodotto:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Vedere se le due matrici A e B sono o meno fra loro coniugate, facendo uso di opportuni invarianti:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

6*. DIAGONALIZZAZIONE SIMULTANEA DI DUE MATRICI

Siano A e B due matrici di ordine n (reali o complesse) ciascuna delle quali è diagonalizzabile (su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{C}$). Ci chiediamo in quali casi è possibile *diagonalizzarle simultaneamente* ovvero in quali casi esiste una base che sia costituita da autovettori sia per A che per B e quindi una matrice invertibile C per la quale si abbia:

$$(6.1) \quad C^{-1}AC = \Lambda \quad C^{-1}BC = \Omega$$

dove Λ e Ω sono rispettivamente le forme diagonali di A e B . Questo problema, che è molto importante sia in meccanica quantistica che nella teoria delle rappresentazioni, ha una risposta sorprendentemente semplice.

6.2 Proposizione. *Siano A e B matrici dello stesso ordine, ciascuna delle quali è diagonalizzabile. Esse sono simultaneamente diagonalizzabili e solo se:*

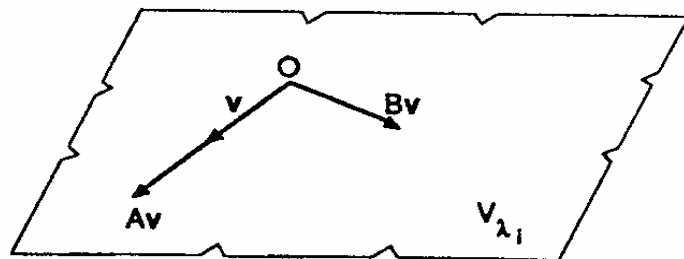
$$(6.3) \quad AB = BA.$$

Dim. Se A e B sono simultaneamente diagonalizzabili valgono le (6.1) e quindi $A = C\Lambda C^{-1}$, $B = C\Omega C^{-1}$. Pertanto risulta:

$$AB = C\Lambda C^{-1}C\Omega C^{-1} = C\Lambda\Omega C^{-1} = C\Omega\Lambda C^{-1} = C\Omega C^{-1}CAC^{-1} = BA.$$

Viceversa supponiamo che ciascuna matrice sia diagonalizzabile e che il loro prodotto commuti. Consideriamo sia A che B come operatori su $\mathbb{C}^n$, (ovvero $\mathbb{R}^n$) ed indichiamo con $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_h}$ gli autospazi relativi ad A , i quali hanno rispettivamente dimensione pari alla molteplicità algebrica del corrispondente autovalore nel polinomio $p_A(\lambda)$.

Sia $\mathbf{v} \in V_{\lambda_i}$; per esso risulta $A(B\mathbf{v}) = B(A\mathbf{v}) = \lambda_i(B\mathbf{v})$, cioè $B\mathbf{v} \in V_{\lambda_i}$ e questo prova che la trasformazione associata a B muta ogni autospazio V_{λ_i} di A in sè.



Sia $\mathbf{w}$ un autovettore per B , cioè $B\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$. Abbiamo visto nell'osservazione 4.6 che esso si scrive in modo unico nella forma $\mathbf{w} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \dots + \mathbf{z}_h$, dove $\mathbf{z}_i$ appartiene all'autospazio V_{λ_i} ed i vettori $\mathbf{z}_i$ non sono tutti nulli. Si ha quindi $B\mathbf{w} = B\mathbf{z}_1 + B\mathbf{z}_2 + \dots + B\mathbf{z}_h = \mu\mathbf{w} = \mu\mathbf{z}_1 + \mu\mathbf{z}_2 + \dots + \mu\mathbf{z}_h$. Tenuto conto che la decomposizione di un vettore come somma di vettori negli autospazi è unica deve necessariamente aversi $B\mathbf{z}_1 = \mu\mathbf{z}_1, B\mathbf{z}_2 = \mu\mathbf{z}_2, \dots, B\mathbf{z}_h = \mu\mathbf{z}_h$. In questo modo abbiamo dato un algoritmo per calcolare, per ogni autovettore di B , almeno un autovettore simultaneo di A e B (uno almeno dei vettori $\mathbf{z}_i$ è non nullo!).

Applichiamo questo procedimento ad una base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ di autovettori di B (certamente esistente perché B è diagonalizzabile); otteniamo almeno n vettori che sono autovettori simultanei per A e B . poiché i vettori $\mathbf{w}_i$ si scrivono come loro combinazione lineare essi generano lo spazio e quindi da essi si può estrarre una base. ♣

6.E Esercizi

1. Siano A e B matrici entrambe diagonalizzabili e tali che il loro prodotto commuti. Provare che se A ammette autovalori distinti ogni base di autovettori di A è anche una base di autovettori di B .
2. Verificare che le seguenti matrici A e B sono diagonalizzabili; nel caso che ammettano una diagonalizzazione simultanea determinare una base comune di autovettori:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Se le matrici A, B, C hanno autovalori distinti, sono diagonalizzabili e commutano, sono anche simultaneamente diagonalizzabili?

7. ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

ESERCIZIO I

1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v}$ sul sottospazio $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, dove:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Si consideri la trasformazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(a, b, c) = (0, a + 3b - 2c, 2a + 6b - 4c).$$

- Calcolare la matrice A associata a T nella base canonica.
 - Determinare gli autovalori e dire se T è diagonalizzabile; in caso affermativo trovare una matrice diagonalizzante per A .
3. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ un autovettore per la matrice A corrispondente all'autovalore λ ; provare che la matrice $A - kI$, al variare del parametro k , ammette lo stesso autovettore e determinarne il corrispondente autovalore.

ESERCIZIO II

1. Calcolare, se esistono, valori del parametro reale t per i quali la seguente matrice A_t ammette due autovalori negativi ed uno positivo:

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t-1 \\ 0 & t-1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Vedere se l'applicazione $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 12 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile ed in caso affermativo determinarne l'applicazione inversa.

3. Si verifichi che nello spazio $\mathbb{R}^3$ le formule:

$$x' = 5x - 8y + 7z, \quad y' = 2x - 3y + 4z, \quad z' = x - 2y + 3z,$$

si possono interpretare come un cambiamento di coordinate, nel passaggio dalle coordinate x, y, z relative alla base canonica alle coordinate x', y', z' relative a una base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Si tratta di un cambiamento di basi ortonormali rispetto al prodotto scalare canonico? Esprimere i vettori $\mathbf{v}_i$ rispetto alla base canonica.

ESERCIZIO III

1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e l'operatore di derivazione $D : \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}_3[x]$ che associa ad ogni polinomio la sua derivata prima. Determinare gli autovalori di D e calcolarne i relativi autospazi. Decidere se esso è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarlo.

2. Si consideri la matrice $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

a) Determinare una base per il sottospazio $W \subset M_2(\mathbf{R})$ generato da $A, A^T, A + A^T$.

b) Verificare che il sottoinsieme $U = \left\{ \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{vmatrix}, a, b \in \mathbf{R} \right\}$ è un sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$.

c) Determinare una base per il sottospazio $W \cap U$.

3. Date $A = \begin{vmatrix} -66 & 190 & 68 \\ -4 & 13 & 4 \\ -53 & 148 & 55 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} -30 & 96 & 32 \\ -2 & 8 & 2 \\ -25 & 75 & 27 \end{vmatrix}$:

a) calcolare $B^{-1}AB$ e trovare una base di autovettori di A ;

b) decidere se A e C hanno gli stessi autospazi.

ESERCIZIO IV.

1. Determinare per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ x + y + k^3z &= 3 \\ 2x + 2y + (1+k)z &= 1 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

è compatibile e determinarne le soluzioni.

2. Provare che la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

è diagonalizzabile ed ammette autospazi ortogonali. Determinare una matrice diagonalizzante che sia ortogonale.

3. Nello spazio $\mathcal{V}_0$, munito del prodotto scalare canonico, sia u un versore fissato e sia $T : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}_0$ l'applicazione definita per ogni $x \in \mathcal{V}_0$ da $T(x) = x \wedge u - 4\langle x, u \rangle u$, (dove il verso del prodotto vettoriale è definito a partire da una terna ortonormale i, j, k fissata nello spazio.) Verificare che T è una trasformazione lineare, determinare $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$ e decidere se l'operatore è diagonalizzabile.

Capitolo 8

SPAZI VETTORIALI METRICI

INTRODUZIONE. Le nozioni elementari di distanza e di misura degli angoli si deducono entrambe, nel linguaggio degli spazi vettoriali su $\mathbf{R}$ e su $\mathbf{C}$, dalla nozione di “*prodotto scalare canonico*” e di “*prodotto hermitiano canonico*”. Questi ultimi determinano la nozione di ortogonalità e quelle ad essa associate di basi ortonormali, proiezioni ortogonali, matrici ortogonali ed unitarie. Come nei capitoli precedenti, diamo la dovuta enfasi all'aspetto algoritmico presentando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt e formule esplicite per la costruzione dei proiettori ortogonali.

1. IL PRODOTTO SCALARE CANONICO IN $\mathbf{R}^n$

Vogliamo ora introdurre nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$ un'*ulteriore struttura* che ci permetta di definire le nozioni di “*distanza*” e “*angolo*”; in particolare l’“*ortogonalità*”, le “*proiezioni ortogonali*”, etc..

Nella sezione 1 del capitolo 6 abbiamo visto come la nozione di prodotto scalare, opportunamente definita facendo uso della distanza e degli angoli a noi noti dalla geometria euclidea, ci ha permesso di riscrivere in $\mathcal{E}^3$ la condizione di ortogonalità e quella di modulo con le formule (1.8) e (1.9) che fanno uso di coordinate rispetto ad una base i, j, k ortonormale. Abbiamo quindi trasferito, tramite l'isomorfismo $\mathcal{V}_O \rightarrow \mathbf{R}^3$ (determinato da i, j, k), le stesse nozioni allo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$. In $\mathbf{R}^n$ non abbiamo una nozione “*geometrica*” di lunghezza e di angolo ma possiamo tentare di definire tali nozioni dopo aver introdotto un “*prodotto scalare*” tramite una formula che altri non è che la (1.8) generalizzata ad n coordinate (cfr. 1.15' del capitolo 6).

1.1 Definizione. Si chiama prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ la funzione che associa ad ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ il numero reale, indicato con $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, dato da:

$$(1.2) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \quad \clubsuit$$

Osserviamo che, se si interpretano i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ come vettori colonna, e quindi come matrici di tipo $n \times 1$ la (1.2) può leggersi come il *prodotto fra matrici* $\mathbf{y}^T \mathbf{x}$ (definito in 5.2 del capitolo 1), dove $\mathbf{y}^T$ è la matrice trasposta di $\mathbf{y}$ (di tipo $1 \times n$) cioè un vettore riga:

$$(1.2') \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \mathbf{y}^T \mathbf{x}.$$

Il prodotto scalare canonico è una funzione:

$$\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

che gode delle seguenti proprietà:

1.3 Proprietà. Per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha:

- | | | |
|----|---|-------------|
| a) | $\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ | bilinearità |
| | $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ | |
| b) | $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ | simmetria, |
| c) | $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, essendo $= 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ | positività. |

In breve si dice che il *prodotto scalare canonico* in $\mathbb{R}^n$ è una *forma bilineare, simmetrica, positiva*.

Le proprietà a) sono conseguenza del fatto che l'espressione esplicita del prodotto scalare canonico (1.2) è lineare (separatamente) nelle coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ di $\mathbf{x}$ e nelle coordinate $y_1, y_2, \dots, y_n$ di $\mathbf{y}$. La proprietà b) è conseguenza del fatto che scambiando in (1.2) le coordinate di $\mathbf{x}$ con quelle di $\mathbf{y}$ l'espressione non cambia. La proprietà c) è conseguenza del fatto che sui reali l'espressione $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ è sempre positiva o nulla, e si annulla se e solo se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

1.4 Proposizione. Supponiamo che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{y} = \mathbf{o}$.

Dim. Infatti se assumiamo $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ deve ancora aversi $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$ e quindi $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ essendo il prodotto scalare canonico positivo. $\clubsuit$

Di solito, per esprimere la proprietà enunciata nella proposizione 1.4, si dice anche che la forma bilineare è *non degenera*. Naturalmente, data la

simmetria del prodotto scalare canonico, la stessa proprietà vale scambiando il primo con il secondo vettore.

Sempre in analogia con il caso di $\mathbb{R}^3$ poniamo le seguenti:

1.5 Definizioni. Si chiama modulo del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ il numero:

$$(1.6) \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Si chiama coseno dell'angolo di due vettori non nulli $x, y \in \mathbb{R}^n$ il numero:

$$(1.7) \quad \cos \hat{x}\hat{y} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}.$$

Osserviamo che l'espressione (1.6) è la generalizzazione in $\mathbb{R}^n$ del teorema di Pitagora. Essa può essere assunta come il *modulo* del vettore x , ossia come la sua "lunghezza" in quanto, essendo il prodotto scalare (1.2) non degenerare e positivo, per ogni vettore non nullo $\langle x, x \rangle^{1/2}$ è un numero reale positivo.

Perchè la (1.7) abbia senso occorre provare che il secondo membro è in modulo minore o uguale ad 1. Ciò è conseguenza della seguente:

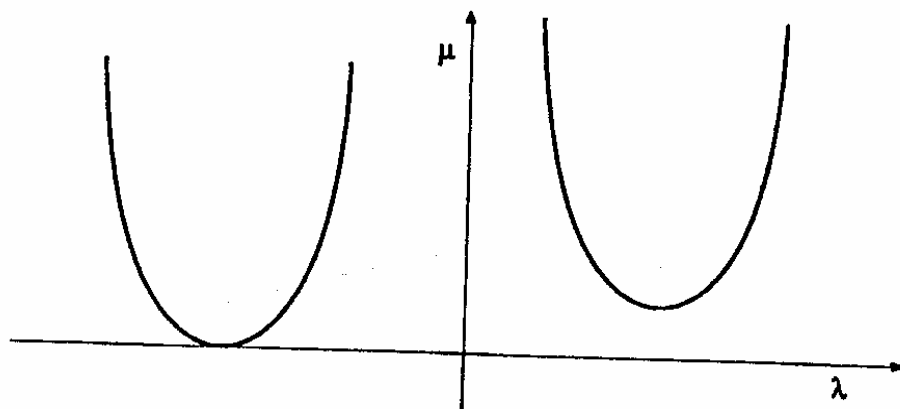
1.8 Proposizione. Per ogni coppia di vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ risulta:

$$(1.9) \quad \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0. \quad \text{DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ}$$

Dim. La formula è certamente vera se i vettori sono entrambi nulli, assumiamo quindi $y \neq 0$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta:

$$\|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0,$$

(cfr. proposizione 1.3, c)). Otteniamo una disequazione di secondo grado in λ ; nel piano λ, μ , l'equazione $\mu = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda + \|x\|^2$ rappresenta una parabola che ha la concavità verso l'alto (essendo $\|y\|^2 > 0$) e che non assume valori negativi.



Ne segue che il discriminante della corrispondente equazione di secondo grado deve essere negativo o nullo cioè la (1.9). ♣

Dalla disuguaglianza di Schwarz si ricava, se x, y sono non nulli:

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

Notiamo che, sempre a partire dalla (1.9) è facile dimostrare la:

$$(1.10) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE}$$

che permette di giustificare l'interpretazione della (1.6) come una *lunghezza*.

Con l'introduzione del prodotto scalare canonico abbiamo ottenuto la possibilità di effettuare in $\mathbb{R}^n$ *misure di distanze* e *misure angolari*. In questo senso, quando in $\mathbb{R}^n$ consideriamo il prodotto scalare canonico, diciamo che esso ha una struttura di *spazio vettoriale euclideo*, ovvero di *spazio vettoriale metrico* su $\mathbb{R}$.

1.11 ORTOGONALITÀ E MATRICI ORTOGONALI. Poniamo innanzi tutto le seguenti:

1.12 Definizioni. i) Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, si dice che essi sono ortogonali (in simboli $x \perp y$) se e solo se il loro prodotto scalare canonico è nullo, cioè: $\langle x, y \rangle = 0$.

ii) Sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ una base per lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$. Essa si dice ortonormale se:

$$\begin{aligned} \|v_i\| &= 1 && \text{per ogni } i = 1, 2, \dots, n. \\ \langle v_i, v_j \rangle &= 0 && \text{per ogni } i \neq j. \end{aligned}$$

iii) Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice ortogonale se i suoi vettori colonna costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. ♣

Notiamo che il prodotto fra matrici di $M_n(\mathbb{R})$ può ora scriversi in termini di prodotti scalari in quanto, sui reali, il prodotto $a_i b^j$ fra un vettore riga a_i ed un vettore colonna b^j ha la stessa espressione del prodotto scalare $\langle a_i^T, b^j \rangle$ dei due vettori (scritti entrambi per colonna). Da ciò segue la caratterizzazione delle matrici A ortogonali:

$$AA^T = I \quad \text{ovvero} \quad A^T = A^{-1}.$$

È facile verificare che il *prodotto* di due matrici ortogonali è ancora ortogonale, l'*inversa* di una matrice ortogonale è ortogonale, la *trasposta* di una matrice ortogonale è ortogonale (cfr. soluzioni di 1.E).

Le matrici ortogonali sono legate ai cambiamenti di base ortonormali in $\mathbb{R}^n$: se abbiamo un cambiamento di base di matrice C , come in (3.4) del capitolo 5, la matrice C^T figura nel cambiamento di coordinate (cfr. 3.5) è per definizione una matrice ortogonale e quindi anche C è ortogonale. Le formule (3.6) e (3.7) del capitolo 5 si semplificano in quanto in questo caso $C^{-1} = C^T$ e $(C^T)^{-1} = (C^{-1})^T = (C^T)^T = C$.

In definitiva abbiamo provato che:

le formule di un cambiamento di base ortonormale e le corrispondenti formule per il cambiamento delle coordinate avvengono tramite matrici ortogonali.

1.13 FORMULA DI AGGIUNZIONE. OPERATORI AGGIUNTI ED AUTO-AGGIUNTI. Sia A una matrice di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ e consideriamo l'applicazione lineare $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ad essa associata. Consideriamo inoltre, sia in $\mathbb{R}^m$ che in $\mathbb{R}^n$, i corrispondenti prodotti scalari canonici. Si ha la seguente proposizione che *caratterizza* la matrice trasposta A^T , che nel 2.8 del capitolo 3 è stata definita in modo puramente formale tramite lo scambio di righe e colonne.

1.14 Proposizione. *Sia A una matrice di tipo $m \times n$. La matrice trasposta A^T (di tipo $n \times m$) è l'unica matrice tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^m$ si abbia:*

$$(1.14') \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle \quad \text{FORMULA DI AGGIUNZIONE.}$$

Dim. Sia A una matrice ed A^T la sua trasposta. La verifica di (1.14') è stata sull'uso della (1.2'):

$$\langle Ax, y \rangle = y^T Ax = y^T (A^T)^T x = (A^T y)^T x = \langle x, A^T y \rangle.$$

Per la converso, supponiamo che B sia una matrice di tipo $n \times m$ e tale che $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^m$. Sempre facendo uso di (1.2') abbiamo $y^T Ax = (By)^T x = y^T B^T x$, ovvero $y^T (B^T x - Ax) = 0$ e quindi $\langle B^T x - Ax, y \rangle = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^m$; per la proposizione 1.4 se ne deduce che $B^T x - Ax = (B^T - A)x = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ o, equivalentemente, $\mathbb{R}^n = \ker(B^T - A)$. Da $\dim(\ker(B^T - A)) = n$ segue $\dim(\text{Im}(B^T - A)) = 0$, quindi $\text{Im}(B^T - A) = \{0\}$ ed i vettori colonna di $B^T - A$ sono nulli. Essendo $B^T - A$ la matrice nulla abbiamo provato che $A = B^T$ e quindi $A = A^T$. ♣

Il significato della formula di aggiunzione è il seguente. La matrice

A^T , come operatore, dà luogo anch'essa ad una trasformazione lineare $A^T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ detta *trasformazione lineare aggiunta* di A ; in definitiva siamo in presenza di due operatori lineari:

$$\mathbb{R}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{A} \\ \xleftarrow{A^T} \end{array} \mathbb{R}^m$$

che hanno un "comportamento speciale" rispetto ai prodotti scalari canonici di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$: il prodotto scalare (in $\mathbb{R}^m$) del trasformato di un vettore x tramite l'operatore A e di un vettore y uguaglia il prodotto scalare (in $\mathbb{R}^n$) del vettore x e del trasformato di y tramite l'operatore aggiunto A^T .

* La formula di aggiunzione è utile, per esempio, per dimostrare in modo sintetico la formula:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

che abbiamo già visto in 2.9 del capitolo 3. Infatti si ha: $\langle (AB)x, y \rangle = \langle A(Bx), y \rangle = \langle Bx, A^T y \rangle = \langle x, B^T A^T y \rangle$, d'altra parte risulta anche $\langle (AB)x, y \rangle = \langle x, (AB)^T y \rangle$ e quindi la formula è provata in virtù dell'unicità data in (1.14'). *

Come conseguenza della formula di aggiunzione abbiamo infine che:

- (i) Un operatore lineare rappresentato da una matrice ortogonale conserva il prodotto scalare canonico e quindi il modulo dei vettori:

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^T A y \rangle = \langle x, y \rangle,$$

e viceversa.

- (ii) Un operatore lineare rappresentato da una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica è *autoaggiunto*, cioè:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

1.14 OSSERVAZIONE CRITICA. Abbiamo introdotto il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ tramite un'espressione esplicita in termini delle coordinate ottenendo una forma bilineare, simmetrica e non degenera positiva. Va osservato però che la dimostrazione della disuguaglianza di Schwarz (1.9) si basa solo sulle proprietà 1.3 del prodotto scalare che sono "formali".

D'altra parte è possibile definire in $\mathbb{R}^n$ altri prodotti scalari bilineari, simmetrici e non degeneri positivi e per questi la disuguaglianza di Schwarz e le sue conseguenze continuano pertanto a valere (cfr.[A]).

1.E Esercizi

1. Calcolare, facendo uso del prodotto scalare canonico, il modulo dei seguenti vettori ed il coseno dell'angolo che essi formano a coppie:

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

2. Verificare che la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico.

3. Vedere se le seguenti matrici sono o meno ortogonali:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

4. Provare che se A è ortogonale anche i suoi vettori riga sono una base ortonormale.

5. Provare che se A e B sono ortogonali e dello stesso tipo anche il prodotto AB è ortogonale.

6. Sia A una matrice ortogonale, provare che:

a) la sua inversa A^{-1} è ortogonale,

b) $\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1$.

7. Provare che ogni matrice di permutazione è ortogonale.

8. Si considerino i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ dati, nella base canonica, da:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{vmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{vmatrix}.$$

Provare che costituiscono una base ortonormale. Indicate con x, y, z le coordinate rispetto alla base canonica e con x', y', z' le coordinate nella nuova base, determinare le formule di trasformazione per i cambiamenti di base e per le coordinate.

2. PROIETTORI ORTOGONALI SU SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^n$ E LORO MATRICI

Nello spirito con cui stiamo passando dallo spazio vettoriale euclideo V_0 allo spazio $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare canonico, andiamo a definire la seguente "operazione di proiezione" su un sottospazio proprio $W \subset \mathbb{R}^n$:

2.1 Definizione. Si chiama proiezione ortogonale o proiettore l'applicazione:

$$P = P_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

che associa ad ogni $x \in \mathbb{R}^n$ il vettore $Px \in W$ tale che il vettore differenza $x - Px$ sia ortogonale a tutti i vettori di W . In formule:

- (i) $Px \in W$
- (ii) $\langle x - Px, w \rangle = 0$ per ogni $w \in W$. ♣

Perché tale definizione abbia senso occorre provare che il vettore Px esiste ed è unico.

Premettiamo il seguente:

2.2 Lemma Sia A una matrice di tipo $n \times k$ e di rango k ($k \leq n$) allora la matrice $A^T A$ ha rango k .

Dim. $A^T A$ è una matrice quadrata di ordine k , per provare che il suo rango è k basta provare che $\dim(\ker(A^T A)) = 0$ e quindi che il sistema $A^T A x = 0$ ammette la sola soluzione $x = 0$. Supponiamo che per un vettore $x \neq 0$ si abbia $(A^T A)x = 0$; allora si ha anche $x^T A^T A x = 0$ cioè $(Ax)^T Ax = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 = 0$, da cui segue che $Ax = 0$ ovvero che $x \in \ker(A)$. Essendo $\dim(\ker(A)) = 0$ abbiamo che $x = 0$, cioè una contraddizione. ♣

2.3 Proposizione. Il vettore Px definito dalla (2.1) esiste ed è unico. Inoltre P è una trasformazione lineare rappresentata, nella base canonica, da una matrice $\mathcal{P}$ che opera sui vettori di $\mathbb{R}^n$ per moltiplicazione a sinistra.

Dim. Sia $a^1, \dots, a^k$ una base di $W \subset \mathbb{R}^n$ e sia A la matrice (di tipo $n \times k$) che li ammette come vettori colonna. Un vettore variabile $w \in W$ si scrive quindi nella forma $w = Ay$, ove le coordinate variabili di $y \in \mathbb{R}^k$ sono i pesi che esprimono w come combinazione lineare della base. Il vettore Px , se esiste, è anch'esso, per la condizione (i), della forma Az con $z \in \mathbb{R}^k$ opportuno e da determinare facendo uso della condizione (ii). Si ha quindi $(Ay)^T (x - Az) = y^T (A^T x - A^T Az) = \langle A^T x - A^T Az, y \rangle = 0$ per ogni y e per la proposizione 1.4 si ottiene:

$$A^T x - A^T Az = 0.$$

Il lemma 2.2 $A^T A$ ha rango massimo e quindi è invertibile; possiamo quindi ricavare, in modo unico, il vettore numerico

$$z = (A^T A)^{-1} A^T x.$$

Definitiva abbiamo:

$$Px = Az = A(A^T A)^{-1} A^T x.$$

Da ciò si deduce che l'operatore P opera sulle coordinate dei vettori di $\mathbb{R}^n$ per moltiplicazione con la matrice $\mathcal{P}$ (di ordine n):

$$(\quad) \quad \mathcal{P} = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

e pertanto è lineare. ♣

La matrice $\mathcal{P}$ si chiama anche *matrice di proiezione* e le seguenti proprietà caratteristiche sono immediate:

$$\begin{aligned} (\quad) \quad \mathcal{P} &= \mathcal{P}^T && \text{matrice simmetrica,} \\ (\quad) \quad \mathcal{P} &= \mathcal{P}^2 && \text{matrice idempotente.} \end{aligned}$$

Per verificarle basta usare l'espressione (2.4) ed effettuare le operazioni.

La matrice trovata in (2.4) rappresenta la trasformazione lineare P nella base canonica di $\mathbb{R}^n$, come tale essa è ovviamente unica anche se la matrice A che figura nella formula può essere scelta in infiniti modi! In altre parole la (2.4) non è semplice da calcolare manualmente, a partire dalla matrice A , nel caso che la dimensione di W sia elevata.

Un modo per trovare un'espressione più semplice è quella di scegliere per W una *base ortonormale*; in questo caso si ha $A^T A = I$ e la matrice di proiezione diviene:

$$(2.7) \quad \mathcal{P} = A A^T, \quad (\text{caso di base ortonormale per } W).$$

Notare che (2.4) e (2.7) sono ovviamente la stessa matrice in quanto rappresentano la trasformazione P di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica, anche se le matrici A che figurano nelle due formule sono diverse!

2.8 OSSERVAZIONE. Per esprimere tramite una matrice il proiettore P_W si possono fare scelte di basi di $\mathbb{R}^n$ più convenienti rispetto alla base canonica. Infatti, se prendiamo una base qualunque $w_1, w_2, \dots, w_k$ di W e la completiamo ad una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo vettori indipendenti $v_{k+1}, \dots, v_n$ tali che $\langle v_j, w_i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$, e per ogni

$j = k + 1, \dots, n$, per costruzione si ha: $P_W(\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i$, per $i = 1, 2, \dots, k$; $P_W(\mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$ per $j = k + 1, \dots, n$ e la matrice in questa base è data da:

$$\mathcal{P}' = \begin{vmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad I_k \text{ matrice identica } k \times k$$

Nella sezione 4 vedremo che per costruire i vettori $\mathbf{v}_j$ basta scegliere una base nel sottospazio ortogonale a W . ♡

2.9 ESEMPIO. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{x}$ sul sottospazio $W = \text{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$:

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che i vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono indipendenti; inoltre, essendo il loro prodotto scalare $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0$, essi sono anche ortogonali. Per ottenere una base ortonormale di W basta pertanto dividere ciascuno di essi per il corrispondente modulo:

$$\mathbf{u}_1 = 1/\sqrt{6} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = 1/\sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

La matrice A della formula (2.7) ed AA^T sono date da:

$$A = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad AA^T = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{vmatrix}.$$

Il vettore proiezione di $\mathbf{x}$ è pertanto:

$$\begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

da cui segue che $\mathbf{x}$ appartiene al sottospazio W . ♡

Nel caso che il sottospazio W abbia dimensione 1 e sia generato dal vettore non nullo $\mathbf{a}$, la matrice A coincide con il vettore $\mathbf{a}$ pensato come matrice $n \times 1$. La matrice di proiezione in questo caso diviene:

$$(2.10) \quad \mathcal{P} = \mathbf{a}(\mathbf{a}^T \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}^T = \mathbf{a} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{-1} \mathbf{a}^T = \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle},$$

e la proiezione del vettore $\mathbf{x}$ è data da:

$$(2.10') \quad P_{\text{Span}(\mathbf{a})} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \frac{\mathbf{a} \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}.$$

Naturalmente, se il vettore generatore $\mathbf{a}$ ha modulo 1 il denominatore della precedente formula non appare. In ogni caso dalla (2.10') ben si legge che il vettore $\mathbf{a}$ primo membro appartiene al sottospazio W , così come doveva essere!

Torniamo ora alla (2.7) e ricordiamo che i vettori colonna $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^k$ di A sono una *base ortonormale* di W . La formula può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad P_W \mathbf{x} &= A A^T \mathbf{x} = A \begin{bmatrix} \text{---} & (\mathbf{a}^1)^T & \text{---} \\ \text{---} & (\mathbf{a}^2)^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & (\mathbf{a}^k)^T & \text{---} \end{bmatrix} \mathbf{x} = A \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}^1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}^2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}^k \rangle \end{bmatrix} \\
 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}^1 \rangle \mathbf{a}^1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}^2 \rangle \mathbf{a}^2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}^k \rangle \mathbf{a}^k \\
 &= P_{\text{Span}(\mathbf{a}^1)} \mathbf{x} + P_{\text{Span}(\mathbf{a}^2)} \mathbf{x} + \dots + P_{\text{Span}(\mathbf{a}^k)} \mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Si ha quindi il seguente *teorema di decomposizione* delle proiezioni ortogonali:

2.12 Teorema. Se $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^k$ è una base ortonormale del sottospazio W , la proiezione ortogonale $P_W \mathbf{x}$ di un qualunque vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è la *somma delle proiezioni ortogonali di $\mathbf{x}$ sui sottospazi generati dai singoli vettori di base.* ♣

La matrice del proiettore in questo caso si *decompone* secondo la formula:

$$(2.13) \quad P = A A^T = \mathbf{a}^1 (\mathbf{a}^1)^T + \mathbf{a}^2 (\mathbf{a}^2)^T + \dots + \mathbf{a}^k (\mathbf{a}^k)^T$$

dove i singoli addendi a secondo membro sono matrici quadrate di ordine n che esprimono le proiezioni sulle rette mutuamente ortogonali generate dai vettori di base.

2.14 OSSERVAZIONE In analogia al caso dello spazio $\mathcal{V}_O$ (cfr. soluzione dell'esercizio 2 di 2.E, capitolo 7) possiamo definire l'operatore di *simmetria* rispetto al sottospazio $W \subset \mathbb{R}^n$ facendo uso dell'operatore di proiezione P sullo stesso sottospazio:

$$S = S_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad S\mathbf{x} = 2P\mathbf{x} - \mathbf{x}.$$

2.15* OSSERVAZIONE. Siano $\mathbf{v}$ e W rispettivamente un vettore ed un sottospazio di $\mathbb{R}^n$; la proiezione ortogonale $\mathbf{u} = P_W(\mathbf{v})$ è l'unico vettore di W che ha "*distanza minima*" da $\mathbf{v}$, cioè:

$$\|u-v\| = \min_{w \in W} \{\|w-v\|\}.$$

Infatti posto $v = u + v'$ con $v - u = v' \perp W$, si ha $\|v-u\|^2 = \|v'\|^2$ e per ogni vettore $w \in W$ risulta $\|w-v\|^2 = \|(w-u) - v'\|^2 = \|w-u\|^2 + \|v'\|^2$, visto che $w-u \in W$ e quindi $v' \perp (w-u)$ (teorema di Pitagora). Quindi $\|w-v\|^2 = \|w-u\|^2 + \|v-u\|^2 \geq \|v-u\|^2$ e l'uguaglianza si ha se e solo se $\|w-u\|^2 = 0$, cioè se $w = u = P_W(v)$. $\heartsuit$

2.16* IL PROBLEMA DEI MINIMI QUADRATI (cenni). Nelle applicazioni è assai frequente trovare un sistema $Ax = b$ di m equazioni in n incognite in cui $m > n$. Anche se per ragioni fisiche è noto che il sistema ammette soluzioni, questa proprietà è facilmente distrutta da piccoli errori numerici o di arrotondamento; infatti si vede facilmente che, perturbando di poco o i coefficienti di A o il termine noto b , da un sistema compatibile se ne ottiene uno incompatibile. Per questo motivo è spesso utile sostituire il problema della risoluzione del sistema con il seguente *problema dei minimi quadrati*: determinare un vettore x_0 tale che $\|Ax_0 - b\| = \min_x \{\|Ax - b\|\}$. Ovviamente se esiste una soluzione x_0 del sistema, cioè $Ax_0 - b = 0$, x_0 è anche soluzione del problema dei minimi quadrati. In generale al variare di x il vettore Ax varia in $W = Im(A)$. Dall'osservazione 2.15 si deduce facilmente che il problema proposto si risolve con i seguenti passi:

- a) si determina il vettore $b_0 = P_W(b)$ con $W = Im(A)$;
- b) si risolve il sistema $Ax = b_0$ che è ora compatibile (perché?) e le soluzioni trovate risolvono il problema proposto.

Questi due passi possono ridursi ad uno solo nel modo seguente. Infatti $b = b_0 + b'$, con $b' \perp Im(A)$, $b_0 \in Im(A)$, implica che $A^T b = A^T b_0$; dunque dall'equazione $Ax = b_0$ deduciamo $A^T Ax = A^T b_0 = A^T b$ e basta risolvere il sistema $A^T Ax = A^T b$. Viceversa se:

$$(2.17) \quad A^T Ax_0 = A^T b,$$

si ha $A^T(Ax_0 - b) = 0$ e quindi $Ax_0 - b$ è ortogonale ad $Im(A)$ e $b = (b - Ax_0) + Ax_0$ è la decomposizione ortogonale di b rispetto ad $Im(A)^\perp$ ed $Im(A)$. Il vettore x_0 che soddisfa (2.17) è quindi soluzione del problema dei minimi quadrati.

Naturalmente una soluzione di b) è definita a meno di vettori in $ker(A)$ e quindi ci si può ulteriormente porre il problema di scegliere una soluzione ottimale.... Per una discussione più completa di questo importante problema si rinvia a corsi di analisi numerica. *

2.E Esercizi

1. Determinare una matrice per il proiettore sul sottospazio generato dal vettore y di componenti $1/2, -3, 1/2$.

2. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ di componenti $-1, 2, 0, 0$ sul sottospazio generato dai vettori:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

3. Determinare una matrice per la proiezione ortogonale sul sottospazio $V = \text{Span}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

3. IL PROCEDIMENTO DI ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

Sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k ($k \leq n$) e sia $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ una sua base. Vogliamo descrivere un algoritmo che permetta, a partire dai dati, di costruire una *base ortonormale* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ del sottospazio. Questo è utile, per esempio, per semplificare la matrice di un proiettore; nel caso $k = n$ fornisce un metodo per costruire una matrice ortogonale a partire da una matrice qualunque.

L'algoritmo (cfr. (2.4) del capitolo 6) è tale che si abbia:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \text{Span}(\mathbf{a}_1) &= \text{Span}(\mathbf{w}_1), & \text{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= \text{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2), \dots, \\ \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) &= \text{Span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k). \end{aligned}$$

Innanzitutto costruiamo i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ in modo tale che verifichino le (3.1) e che siano una base di vettori mutuamente ortogonali.

Si otterrà poi una *base ortonormale* dividendo ciascuno di essi per il suo modulo.

PROCEDIMENTO DI ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

L'idea è di costruire i vettori $\mathbf{u}_i$ *ricorsivamente* in modo che verifichino (3.1). Poniamo quindi $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1$; se a $\mathbf{w}_2$ sottraiamo la sua proiezione ortogonale sul sottospazio generato da $\mathbf{u}_1$ otteniamo un vettore ad esso ortogonale (cfr. 2.1). Poniamo $\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - (\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_1 \rangle / \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle) \mathbf{u}_1$ (per la proiezione indicata stiamo usando la (2.10')).

In generale, costruito il vettore u_{i-1} , otterremo il vettore u_i sottraendo a w_i la sua proiezione ortogonale sul sottospazio $\text{Span}(u_1, \dots, u_{i-1})$.

Si ottengono pertanto le formule:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= w_1 \\
 u_2 &= w_2 - \left(\langle w_2, u_1 \rangle / \langle u_1, u_1 \rangle \right) u_1 \\
 u_3 &= w_3 - \left(\langle w_3, u_1 \rangle / \langle u_1, u_1 \rangle \right) u_1 - \left(\langle w_3, u_2 \rangle / \langle u_2, u_2 \rangle \right) u_2 \\
 &\vdots \\
 (3.2) \quad u_i &= w_i - \left(\langle w_i, u_1 \rangle / \langle u_1, u_1 \rangle \right) u_1 - \left(\langle w_i, u_2 \rangle / \langle u_2, u_2 \rangle \right) u_2 - \dots \\
 &\quad - \left(\langle w_i, u_{i-1} \rangle / \langle u_{i-1}, u_{i-1} \rangle \right) u_{i-1} \\
 &\vdots \\
 u_k &= w_k - \left(\langle w_k, u_1 \rangle / \langle u_1, u_1 \rangle \right) u_1 - \left(\langle w_k, u_2 \rangle / \langle u_2, u_2 \rangle \right) u_2 - \dots \\
 &\quad - \left(\langle w_k, u_{k-1} \rangle / \langle u_{k-1}, u_{k-1} \rangle \right) u_{k-1}.
 \end{aligned}$$

L'ordine con cui sono scritti i vettori nei prodotti scalari in questo contesto è irrilevante; preferiamo scriverli però in quest'ordine per un motivo ben preciso che scopriremo nella sezione 5). Notiamo che la proiezione di w_i è stata determinata facendo uso del teorema 2.12.

Dobbiamo ora provare che i vettori di (3.2) sono una base di W che verifica (3.1). Basta per questo osservare che il sistema (3.2), considerato nelle incognite w_i , è ricorsivo, cioè di forma triangolare ed i coefficienti sulla diagonale principale sono tutti non nulli (perché?) quindi si può invertire e questo prova che i vettori u_i sono una base di W . D'altra parte il sistema costituito dalle prime j equazioni di (3.2) ($j \leq k$) è anch'esso ricorsivo e questo prova le (3.1). $\heartsuit$

3.3 ESERCIZIO. Determinare una matrice per il proiettore sul sottospazio W generato dai seguenti vettori:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Usiamo il procedimento di Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale. Si ha $u_1 = w_1$ e quindi, poiché $\langle w_2, u_1 \rangle = 1$ e $\langle u_1, u_1 \rangle = 2$, risulta:

$$u_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} - 1/2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Poiché $\langle u_2, u_2 \rangle = 1/2$, $\langle w_3, u_1 \rangle = 2$, $\langle w_3, u_2 \rangle = 0$ si ha:

$$u_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - 2/2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Occorre ora dividere ciascuno dei vettori ottenuti per il rispettivo modulo; $\|u_1\| = \sqrt{2}$, $\|u_2\| = 1/\sqrt{2}$, $\|u_3\| = \sqrt{2}$ e quindi la base ortonormale ottenuta

$$a_1 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

La matrice di proiezione richiesta è data da:

$$P = AA^T = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

Il calcolo esplicito è lasciato allo studente.

♡

È chiaro che le formule (3.2) possono essere implementate su un computer, così come il successivo passaggio di normalizzazione dei vettori ottenuti.

A partire dalla struttura canonica metrica di $\mathbb{R}^n$ l'analisi infinitesimale permette di dare senso alla nozione di "volume". Per un parallelepipedo rettangolo, in particolare, il volume è dato dal prodotto delle misure dei lati; per un parallelepipedo qualunque vale la formula:

$$\text{"volume"} = \text{"base"} \times \text{"altezza"}.$$

Un'ulteriore applicazione del procedimento di ortonormalizzazione permette in proposito di provare la seguente:

3.4 Proposizione. Siano $w_1, w_2, \dots, w_n$ i vettori di una base di $\mathbb{R}^n$ e sia B la matrice che li ammette come vettori colonna. Allora il valore assoluto del determinante di B uguaglia il volume del parallelepipedo $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ (dello spazio $\mathbb{R}^n$) costruito sui vettori dati.

Dim. Supponiamo innanzi tutto che i vettori dati siano una base ortogo-

nale, in questo caso si ha:

$$B^T B = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_n \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \|\mathbf{w}_1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|\mathbf{w}_2\|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|\mathbf{w}_n\|^2 \end{vmatrix},$$

da cui si ottiene $\det(B^T B) = (\det(B))^2 = \|\mathbf{w}_1\|^2 \|\mathbf{w}_2\|^2 \dots \|\mathbf{w}_n\|^2$ e quindi

$$|\det(B)| = \|\mathbf{w}_1\| \|\mathbf{w}_2\| \dots \|\mathbf{w}_n\| = \text{vol}(P(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)).$$

Abbiamo così provato la tesi nel caso di un *parallelepipedo retto*. Supponiamo ora che i vettori colonna della matrice B siano una base qualunque; indichiamo con $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ la base ortogonale ottenuta con il procedimento di Gram-Schmidt (3.2) e con A la matrice che li ammette come vettori colonna. Risulta allora:

$$\det(B) = \det(A) = \text{vol}(P(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)) = \text{vol}(P(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)).$$

Infatti il determinante è invariante per combinazioni lineari sulle colonne e di tale natura sono le operazioni del procedimento di Gram-Schmidt. D'altra parte, per il modo geometrico con cui abbiamo ottenuto il procedimento medesimo, i due parallelepipedi sono equivalenti. ♥

3.E Esercizi

1. Determinare la base ortonormale associata alla base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ dal procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Si consideri una base per il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^n$. Se si permutano i suoi vettori la base che si ottiene col procedimento di Gram-Schmidt è sempre la stessa?

3. Sia $W = \text{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$; determinarne una base ortonormale:

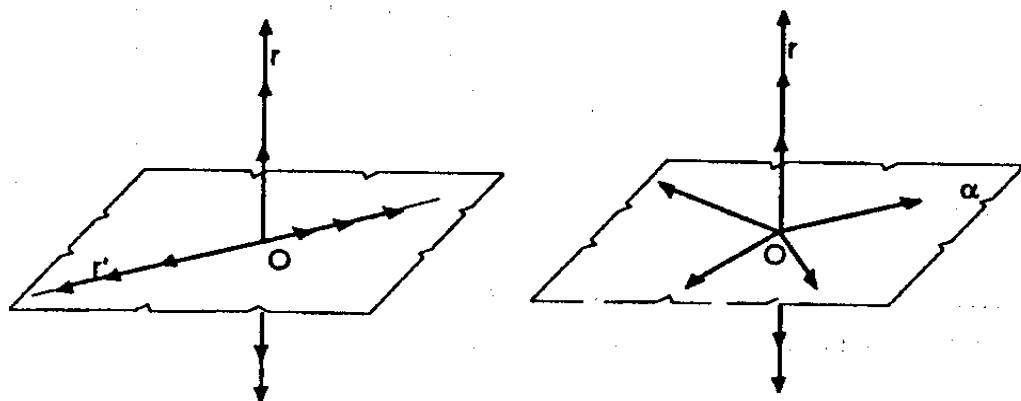
$$w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio di equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ed i vettori v e w di componenti rispettivamente $1, 0, 1, 0$ e $0, 1, -2, 0$. Determinare l'angolo che formano le proiezioni di v e w sul sottospazio.
5. Spiegare il significato geometrico della condizione $\det(I) = 1$, I matrice identità $n \times n$, posta in 3.1 del capitolo 3.

4. SOTTOSPAZI ORTOGONALI E SOMME DIRETTE ORTOGONALI

Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ consideriamo una coppia di rette r, r' costituita da due sottospazi unidimensionali ortogonali, e sia il piano α un sottospazio bidimensionale contenente r' ed ortogonale ad r .

Qualunque vettore della retta r è ortogonale sia ad ogni vettore della retta r' che ad ogni vettore del piano α . La differenza nei due tipi di situazione descritti consiste nel fatto che il piano α è costituito da tutti e soli i vettori di $\mathcal{V}_O$ che sono ortogonali ad ogni vettore di r .



Nel caso generale dello spazio $\mathbb{R}^n$, munito del prodotto scalare canonico, poniamo le seguenti:

4.1 Definizioni. Siano W, U sottospazi di $\mathbb{R}^n$.

- a) W si dice ortogonale ad U (in simboli $W \perp U$) se ogni vettore $w \in W$ è ortogonale a tutti i vettori $u \in U$. In formule deve aversi:

$$\langle w, u \rangle = 0 \quad \forall w \in W, \forall u \in U.$$

b) Si chiama complemento ortogonale di W , e si indica con $W^\perp$, il sottospazio costituito da tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ che risultano ortogonali ad ogni vettore di W . In formule deve aversi:

$$W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

c) I sottospazi W, U decompongono $\mathbb{R}^n$ in somma diretta ortogonale se:

$$\mathbb{R}^n = U \oplus W, \quad U \perp W.$$



Notiamo che in a) se W è ortogonale ad U anche U è ortogonale a W , vista la simmetria del prodotto scalare.

Perché la definizione data in b) abbia senso occorre provare che l'insieme $W^\perp$ è di fatto un sottospazio di $\mathbb{R}^n$; ma ciò è immediato per la bilinearità del prodotto scalare. Osserviamo inoltre che $W \cap W^\perp = \{0\}$, infatti se $x \in W \cap W^\perp$ si ha anche $x \perp x$ e quindi $x = 0$.

Nell'esempio dato all'inizio i sottospazi r ed r' sono fra loro ortogonali; il sottospazio ortogonale ad r è il piano α ed essi decompongono V_O in somma diretta ortogonale.

4.2 OSSERVAZIONE. Notiamo che a), b) può essere verificata facendo uso di una base (o anche un sistema di generatori) per i sottospazi in questione. Per esempio per verificare che i sottospazi U e W sono ortogonali basta verificare che $\langle u_i, w_j \rangle = 0$ per ogni i e j , essendo $u_1, \dots, u_k$ e $w_1, \dots, w_h$ rispettivamente una base per U e per W . Infatti se U e W sono ortogonali vale la condizione $\langle u, w \rangle = 0$ per ogni $u \in U$ e per ogni $w \in W$, quindi essa vale in particolare per i vettori delle basi scelte.

Viceversa se risulta $\langle u_i, w_j \rangle = 0$ per ogni i e j , risulta anche $\langle u, w \rangle = 0$ in quanto abbiamo che ogni vettore $u \in U$ si scrive come combinazione lineare degli u_i ed ogni vettore $w \in W$ si scrive come combinazione lineare dei w_j . L'affermazione è quindi conseguenza della bilinearità del prodotto scalare. Lo studente avrà (forse) riconosciuto il "teorema delle tre perpendicolari" della geometria euclidea! ♥

4.3 ESEMPIO. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio $W^\perp$ sapendo che $W = \text{Span}(w_1, w_2)$:

$$w_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 1/2 \\ -2 \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

I vettori di $W^\perp$ sono tutti e soli i vettori x di $\mathbb{R}^4$ che verificano le condizioni $\langle w_1, x \rangle = 0$, $\langle w_2, x \rangle = 0$. Esse esplicitamente si scrivono:

$$-x_1 + 3x_2 + (1/2)x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$

e danno direttamente le equazioni richieste. ♥

4.4 Proposizione. Sia $A \in M_{mn}$; i sottospazi $\ker(A)$ ed $\text{Im}(A^T)$ decompongono $\mathbb{R}^n$ in somma diretta ortogonale.

Dim. Proviamo innanzi tutto che $\ker(A) = \text{Im}(A^T)^\perp$. Infatti i vettori x di $\ker(A)$ sono caratterizzati dall'essere tutte e sole le soluzioni del sistema $Ax = 0$ le cui equazioni si possono scrivere nella forma $\langle a_i, x \rangle = 0$, cioè $x \perp a_i$, avendo indicato con a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) i vettori riga di A . Essendo questi ultimi un sistema di generatori per $\text{Im}(A^T)$ si ha $\ker(A) \subset \text{Im}(A^T)^\perp$. Sia ora $z \in \text{Im}(A^T)^\perp$; esso verifica la condizione $\langle a_i, z \rangle = 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, m$ (in quanto è ortogonale a tutti i vettori di $\text{Im}(A^T)$) quindi risulta $Az = 0$ ovvero $z \in \ker(A)$.

La decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^n = \ker(A) \oplus \text{Im}(A^T)$ segue ora dalla formula di Grassmann (cfr. 6.10 del capitolo 2 e 1.6 del capitolo 5), tenuto conto che i due sottospazi hanno come intersezione $\{0\}$. ♣

In generale se $U = W^\perp$ risulta anche:

i) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

somma diretta ortogonale,

ii) $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$

formula della dimensione.

Infatti nella sezione 5 del capitolo 2 abbiamo visto che il sottospazio U può rappresentarsi con equazioni cartesiane $Ax = 0$ cioè come nucleo dell'applicazione lineare $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e quindi $U = \ker(A)$, $W = \text{Im}(A^T)$.

4.E Esercizi

1. Vedere se $W = \text{Span}(w_1, w_2)$ e $U = \text{Span}(u_1, u_2)$ sono fra loro ortogonali; in caso affermativo vedere se $U = W^\perp$:

$$w_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad u_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

2. Determinare una base per il sottospazio $W^\perp \subset \mathbb{R}^5$, dove il sottospazio W è definito dalle equazioni:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \quad -2x_1 + x_2 - (1/3)x_3 + x_5 = 0.$$

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, munito del prodotto scalare canonico, trovare una base ortonormale per $W^\perp$ sapendo che W è generato dai vettori v_1 di componenti 1, 1, 1, 1 e v_2 di componenti 2, 1, -1, 3.

5. IL PRODOTTO HERMITIANO CANONICO. MATRICI UNITARIE E CAMBIAMENTI DI BASE ORTONORMALI

Nello spazio vettoriale C^n vogliamo introdurre un "prodotto scalare". La tentazione sarebbe di copiare la formula (1.2) relativa allo spazio R^n , così come abbiamo già fatto in 1.3 del capitolo 2 per introdurre la struttura vettoriale in C^n oppure per definire il prodotto fra matrici ad elementi complessi; ma ciò non può essere fatto! Per capirne la ragione occorre preventivamente spiegare che uso vogliamo fare di questo "prodotto scalare". Innanzi tutto vorremmo poter definire tramite esso il "modulo" di un qualunque vettore non nullo di C^n come un numero reale positivo, così come abbiamo fatto nel caso reale. Inoltre vorremmo poter parlare ancora di vettori di C^n fra loro ortogonali. Supponiamo per un momento di assumere come prodotto scalare l'espressione (1.2) e consideriamo il vettore $x \in C^2$ di componenti $i, -1$; risulta $\langle x, x \rangle = (i)^2 + (-1)^2 = 0$; ecco un esempio di vettore non nullo che verrebbe ad avere un modulo nullo! D'altra parte per il vettore y di componenti $3i, 2$ risulta invece $\langle y, y \rangle = (3i)^2 + (2)^2 = -9 + 4 = -5$ e quindi $\|y\| = \sqrt{-5}$, ovvero un numero complesso!

Per eliminare questi inconvenienti conviene quindi porre la seguente:

5.1 Definizione. Si chiama prodotto hermitiano canonico in C^n la funzione che associa ad ogni coppia di vettori $x, y \in C^n$ il numero (complesso), indicato con $\langle x|y \rangle$, dato da:

$$(5.2) \quad \langle x|y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n,$$

dove $\bar{y}_i$ è il numero complesso coniugato di y_i . ♣

In generale data una matrice A (di tipo $m \times n$) si indica con A^H la matrice *coniugata trasposta*, ottenuta da A trasponendola e coniugandone tutti i suoi elementi; chiaramente si ha:

$$(A^H)^H = A, \quad (AB)^H = B^H A^H.$$

In particolare se $x, y \in C^n$ sono vettori colonna, $y^H = | \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n |$ e la (5.2) può risciversi facendo uso del prodotto fra matrici:

$$(5.2') \quad \langle x|y \rangle = y^H x.$$

Il prodotto hermitiano è una funzione:

$$\langle | \rangle : C^n \times C^n \rightarrow C$$

che gode delle seguenti proprietà:

5.3 Proprietà. Per ogni coppia di vettori $x, y \in \mathbb{C}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha:

$$\begin{aligned} a) \quad & \langle x + x' | y \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x' | y \rangle \\ & \langle \lambda x | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

linearità nella
prima variabile

$$\begin{aligned} a') \quad & \langle x | y + y' \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x | y' \rangle \\ & \langle x | \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

antilinearità nella
seconda variabile

$$b) \quad \langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$$

simmetria antilineare

$$c) \quad \langle x | x \rangle \geq 0, \text{ nullo se e solo se } x = 0$$

positività



Queste proprietà sono di dimostrazione immediata a partire dalla definizione (5.2). A titolo di esempio proviamo la seconda di a'):

$$\begin{aligned} \langle x | \lambda y \rangle &= x_1 \bar{\lambda} y_1 + x_2 \bar{\lambda} y_2 + \dots + x_n \bar{\lambda} y_n \\ &= \bar{\lambda} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Per c) basta osservare che $\langle x | x \rangle = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n$ e che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è il quadrato del suo modulo, pertanto esso è sempre positivo o nullo ed è nullo solo se il numero complesso è nullo.

È evidente la differenza fra le proprietà del prodotto scalare canonico $\mathbb{R}^n$ e quelle del prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$. Ciò nondimeno la permette di definire il modulo di un vettore $x \in \mathbb{C}^n$ tramite la formula:

$$(5.4) \quad \|x\| = \langle x | x \rangle^{1/2}.$$

Per quanto riguarda l'ortogonalità, poniamo, in analogia al caso reale, la seguente:

Definizione. Dati due vettori $x, y \in \mathbb{C}^n$ si dice che x è ortogonale a y (e si scrive $x \perp y$) se il prodotto hermitiano canonico è nullo, cioè:

$$\langle x | y \rangle = 0.$$



Notiamo che l'ortogonalità fra vettori è una relazione simmetrica, nel senso che se $x \perp y$ allora $y \perp x$, anche se il prodotto hermitiano non è simmetrico. Infatti se $\langle x | y \rangle = 0$ risulta anche $\langle y | x \rangle = 0$ in quanto il coniugato di zero è sé stesso.

Poichè per i numeri complessi non ha senso parlare di disuguaglianze, non abbiamo una disuguaglianza di Schwarz nè una formula del tipo 1.7 che permetta di definire l'angolo di due vettori.

Per quanto riguarda la *formula di aggiunzione* essa va scritta nel modo seguente:

$$(5.6) \quad \langle Ax|y \rangle = \langle x|A^H y \rangle,$$

ed A^H è l'unica matrice che gode di questa proprietà. Infatti abbiamo $\langle Ax|y \rangle = y^H Ax = y^H (A^H)^H x = (A^H y)^H x = \langle x|A^H y \rangle$. L'unicità si dimostra con un calcolo analogo a quello del caso reale.

Lo spazio vettoriale C^n , munito del prodotto hermitiano canonico, è un esempio di *spazio vettoriale metrico* su C . In esso abbiamo ora le nozioni di modulo e di ortogonalità e, quanto detto per R^n con la struttura metrica data dal prodotto scalare canonico, può ripetersi al caso attuale.

In particolare si possono definire i proiettori su sottospazi di C^n come nel caso reale e valgono tutte le formule date nella sezione 2, con la sola avvertenza di sostituire le matrici trasposte con le coniugate trasposte ed ovviamente il prodotto scalare canonico con quello hermitiano. Per esempio l'espressione (2.4) della matrice di un proiettore su un sottospazio W nella base canonica è:

$$P = A(A^H A)^{-1} A^H$$

dove i vettori colonna di A sono una base di W .

In analogia con il caso reale abbiamo le seguenti:

5.7 Definizioni. i) Sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ una base per lo spazio vettoriale metrico C^n . Essa si dice ortonormale se:

$$\|v_i\| = 1 \quad \forall i, \quad \langle v_i|v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n$$

ii) Una matrice quadrata A di ordine n si dice unitaria se i suoi vettori colonna costituiscono una base ortonormale per C^n . ♣

Si possono costruire basi ortonormali per C^n ovvero matrici unitarie a partire da basi qualunque facendo uso del procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt della sezione 3, dove si sostituiscono nelle formule (3.2) i prodotti scalari con quelli hermitiani. Va avvertito però che in questo caso l'ordine in cui sono scritti i vettori nei prodotti scalari di (3.2) deve essere lasciato inalterato visto che il prodotto hermitiano canonico è simmetrico antilineare.

Dalla definizione segue che le *matrici unitarie* sono *invertibili*. Un modo equivalente per caratterizzarle è il seguente:

5.8 Proposizione. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{C})$ è unitaria se e solo se $AA^H = A^H A = I$ ovvero $A^{-1} = A^H$. ♣

In $\mathbb{C}^n$ munito della struttura metrica canonica si può parlare di cambiamenti di base ortonormali. La teoria è la stessa del caso reale ma si ottengono matrici unitarie (cfr. 1.11). Analogamente al caso reale le matrici unitarie sono caratterizzate dal fatto di *conservare* il prodotto hermitiano canonico.

Anche la proposizione 4.4 deve essere modificata sostituendo A^T con A^H .

5.E Esercizi

1. Calcolare il modulo ed il prodotto hermitiano canonico dei vettori:

$$x = \begin{vmatrix} 2 - 4i \\ 4i \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 2 + 4i \\ 4 \end{vmatrix}.$$

2. Verificare se la matrice $A = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & (1-i)/\sqrt{3} \\ (1+i)/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{vmatrix}$ è unitaria.

3. Data la matrice $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 - 3i \\ 3 + 3i & 5 \end{vmatrix}$ verificare che risulta $A = A^H$.

4. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale a partire dai vettori:

$$u = \begin{vmatrix} 1 + i \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 + i \\ 0 \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

5. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ due matrici unitarie. Provare che il loro prodotto AB è una matrice unitaria e che A^{-1} è unitaria.

6*. STRUTTURA METRICA IN UNO SPAZIO VETTORIALE

In questa sezione vogliamo rendere astratta la "struttura metrica" che abbiamo visto concretamente per gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Consideriamo quindi il caso in cui V sia uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$ e poniamo le seguenti:

6.1 Definizioni.

- I) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$. Si dice che esso è munito di una struttura di spazio vettoriale metrico su $\mathbf{R}$ se è assegnata una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{R}} : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$, detta prodotto scalare, che sia bilineare, simmetrica e positiva.
- II) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{C}$. Si dice che esso è munito di una struttura di spazio vettoriale metrico su $\mathbf{C}$ se è assegnata una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{C}} : V \times V \longrightarrow \mathbf{C}$, detta prodotto hermitiano, che sia lineare nella prima variabile, antilineare nella seconda, simmetrica antilineare e positiva. ♣

In sostanza stiamo richiedendo che nel caso reale valgano le proprietà 1.3 e nel caso complesso le proprietà 5.3. Se V è munito di una struttura metrica e quindi è assegnato un prodotto scalare, ovvero un prodotto hermitiano, possiamo parlare di *modulo* e di *ortogonalità* per i vettori di V . Basta infatti porre:

$$(6.2) \quad \|v\| = \langle v, v \rangle_K^{1/2} \quad \text{modulo di } v \in V$$

$$(6.3) \quad \langle u, v \rangle_K = 0 \quad \text{ortogonalità di } u, v \in V$$

dove $K = \mathbf{R}$ oppure $K = \mathbf{C}$. ♣

È chiaro che si possono ripetere tutti i ragionamenti che abbiamo sviluppato nelle sezioni precedenti e che erano basati sulle proprietà formali e non sull'espressione esplicita del prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^n$ o del prodotto hermitiano canonico di $\mathbf{C}^n$. Lasciamo allo studente di rivedere tutte le sezioni precedenti da questo punto di vista.

A noi interessa in questo momento di mettere in evidenza quale espressione assuma un prodotto scalare (o un prodotto hermitiano) in termini delle coordinate dei vettori rispetto ad una base.

Assumiamo che V sia uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ munito di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{R}}$ assegnato una volta per tutte e sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ una base fissata; siano inoltre:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n, \quad w = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$$

vettori variabili in V . La linearità rispetto ad entrambe le variabili implica che:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{R}} &= x_1 y_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbf{R}} + x_1 y_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathbf{R}} + \cdots + x_1 y_n \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbf{R}} \\
 &+ x_2 y_1 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbf{R}} + x_2 y_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathbf{R}} + \cdots + x_2 y_n \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbf{R}} \\
 &\vdots \\
 &+ x_n y_1 \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbf{R}} + x_n y_2 \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathbf{R}} + \cdots + x_n y_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbf{R}}
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

L'espressione trovata è abbastanza complicata. In essa le quantità $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_{\mathbf{R}}$ sono numeri noti, in quanto il prodotto è assegnato; essi vanno quindi pensati come coefficienti di un'espressione che è (ovviamente) lineare separatamente nelle variabili $x_1, \dots, x_n$ e $y_1, \dots, y_n$. Se consideriamo la matrice A che ha come elemento di posto i, j il numero $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_{\mathbf{R}}$ otteniamo una matrice simmetrica reale e la (6.4) prende una forma più compatta:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{R}} = \mathbf{y}^T A \mathbf{x} \tag{6.4'}$$

L'espressione (6.4) può essere notevolmente semplificata se si assume che la base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sia *ortonormale*, infatti in tal caso, per definizione, si ha:

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_{\mathbf{R}} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

e quindi si ottiene:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{R}} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{6.5}$$

Abbiamo in effetti provato che:

6.6 Proposizione. *Se nello spazio vettoriale V su $\mathbf{R}$ è assegnato un prodotto scalare, rispetto ad una sua base ortonormale la sua espressione in coordinate coincide con il prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^n$.* ♣

In altri termini l'isomorfismo, determinato dalla scelta di una base ortonormale, fra lo spazio vettoriale V ed $\mathbf{R}^n$ fa corrispondere il prodotto scalare di V a quello canonico di $\mathbf{R}^n$ o come si dice esso è un *isomorfismo fra spazi vettoriali metrici*.

Lasciamo allo studente di trattare il caso di uno spazio vettoriale metrico su $\mathbf{C}$, in particolare di provare la seguente:

6.7 Proposizione. *Se nello spazio vettoriale V su $\mathbf{C}$ è assegnato un prodotto hermitiano, rispetto ad una sua base ortonormale la sua espressione in coordinate coincide con il prodotto hermitiano canonico in $\mathbf{C}^n$.* ♣

Si osservi che il procedimento di Gram-Schmidt si può applicare in

uno spazio vettoriale metrico; in particolare in un tale spazio esistono basi ortonormali.

6.8 ESERCIZIO. Verificare che l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{R}} : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ data da: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{R}} = x_1 y_1 + x_1 y_3 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_3 y_1$, definisce un prodotto scalare rispetto al quale si chiede di ortonormalizzare la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

L'espressione assegnata è lineare separatamente nelle coordinate di $\mathbf{x}$ e di $\mathbf{y}$; inoltre scambiando fra loro le coordinate omonime di questi vettori si riottiene la stessa espressione. Ciò prova che la funzione assegnata è bilineare e simmetrica. Poiché risulta $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{R}} = x_1^2 + 2x_1 x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = (x_1 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ tale espressione è non negativa e si annulla solo per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. La positività è stata qui provata con una manipolazione algebrica; esistono però criteri generali che permettono di studiare la positività di una "forma quadratica".

Per i vettori $\mathbf{e}_i$ risulta:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle_{\mathbf{R}} = 1, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle_{\mathbf{R}} = 1, \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle_{\mathbf{R}} = 2, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle_{\mathbf{R}} = 0$$

pertanto, facendo uso di (5.2) si ha:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3 - (\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbf{R}} / \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbf{R}}) \mathbf{u}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Basta ora calcolare il modulo di $\mathbf{u}_3$ e normalizzare i vettori. ♡

7. ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

ESERCIZIO I

1. Si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ data da $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 - 4x_2 y_2$. Dire se essa è: (a) bilineare, (b) simmetrica, (c) positiva, (d) non degenera (giustificare la risposta).

2. Sia $\mathbf{R}^4$ munito del prodotto scalare canonico e sia W il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Determinare il vettore proiezione ortogonale su W del vettore $\mathbf{u}$ di componenti $0, 0, 1, -1$.

3. In $\mathbf{R}^4$ munito del prodotto scalare canonico si consideri il piano α generato dai vettori $\mathbf{u}$ di componenti $1, 2, 1, -1$ e $\mathbf{w}$ di componenti $0, 1, 1, 0$ e sia $S_{\alpha} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare che associa ad ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ il suo simmetrico rispetto al piano α . Determinare $S_{\alpha} \mathbf{x}$ per il vettore $\mathbf{x}$ di componenti $-1, 0, 1, 1$. (Si consiglia di esprimere tale simmetrico tramite la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su α).

ESERCIZIO II

1. Sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (munito del prodotto scalare canonico) di dimensione k e sia $P_W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione di proiezione su W . Qual'è il nucleo di tale proiezione e quale l'immagine? Quali sono le dimensioni di tali sottospazi?

2. Descrivere mediante equazioni cartesiane $\ker(A)^\perp$, dove:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico e sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare, dipendente dal parametro reale t , definita da:

$$T(x, y, z) = (x + ty + z, y + (t + 1)z, (t - 1)x + y).$$

Determinare, al variare del parametro t , una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ formato dalla totalità dei vettori ortogonali all'immagine di T .

ESERCIZIO III

1. Vedere se la seguente matrice A è unitaria; in caso contrario determinare una base ortonormale (rispetto al prodotto hermitiano canonico) per lo spazio generato dalle sue colonne:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2+i & 0 \\ 2-i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nello spazio $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare canonico si consideri il sottospazio W generato dai vettori:

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Determinare una matrice per il proiettore relativo a tale sottospazio.

2. Sia A la matrice $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

- (a) Provare che è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori.
 (b) Se la base ottenuta in (a) non è ortonormale, usare il procedimento Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale. Dire, giustificando la risposta, se i nuovi vettori sono ancora autovettori.

SOLUZIONI DI ESERCIZI PROPOSTI

Diamo qui le soluzioni di quasi tutti gli esercizi proposti nel testo con brevi spiegazioni dei calcoli effettuati, perchè lo studente abbia una traccia del procedimento usato per pervenire ai risultati. Si deve tener presente però che spesso uno stesso esercizio può essere svolto in più modi e che anche il risultato può essere espresso in più modi, si pensi per esempio al fatto che le equazioni cartesiane di una retta nello spazio non sono uniche così come vi è larga arbitrarietà nella scelta di una base per un sottospazio.

Per ragioni tipografiche spesso indicheremo le componenti di un vettore numerico con la notazione $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Capitolo 1: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

- 2.E** 1. $\xi_1 = (1 + \sqrt{2}/2)/8$, $\xi_2 = 1/8$, $\xi_3 = -1/4$.
2. $\xi_1 = h + 1/3$, $\xi_2 = h$, $\xi_3 = h$. 3. $\xi_1 = [x_2 - (1 + 2\log 3)x_4]/3$,
 $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = 2x_4$, $\xi_4 = x_4$ (x_3, x_4 variabili libere).
4. Si scambino fra loro le prime due equazioni. Si trovano le soluzioni:
 $\xi_1 = 28 - 6x_3$, $\xi_3 = \frac{1}{2}(9 - 2x_3 - 2x_5)$, $\xi_3 = x_3$, $\xi_4 = 3 - x_5$, $\xi_5 = x_5$.
5. Si ottengono infinite soluzioni $\xi = (\sqrt{2}/4)h + 1/2$, $\eta = h$.
6. Procedendo come nell'esempio 2.19 a partire dalla tabella:
- | | | | | |
|---|--|------------|--|--|
| $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{vmatrix}$ | e si trova | $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ |
|---|--|------------|--|--|
- cui corrisponde una equazione incompatibile $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$.

- 3.E** 1. (a) no; (b) sì. 2. (a) no; (b) $u = 1/5$, $v = -1/5$.
3. Si può effettuare l'E.G. senza scambi di righe; si trova:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

e le soluzioni: $\xi_1 = 7(1-x_3)/5$, $\xi_2 = -(6+4x_3)/5$, $\xi_3 = x_3$, $\xi_4 = 1$.

4. Effettuando l'eliminazione senza scambi di righe si trova:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & -3/2 & \sqrt{2}+1 \end{array} \right|$$

i tre sistemi ammettono ciascuno un'unica soluzione. Per il primo si trova la terna $1/3, 0, 0$.

5. A è non singolare, B è singolare. 7. $rg(A) = 3$, $rg(B) = 2$.

8. Convieni scambiare le ultime due righe. Con l'E.G. si trova, per $t \neq 1$:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & -1 & 1-t & -1 \\ 0 & 0 & 1-t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t-t^2 \end{array} \right|$$

Il sistema è compatibile solo se $2-t-t^2 = 0$, cioè per $t = -2$ (perchè l'E.G. fatta vale per $t \neq 1$). Per $t = 1$ basta scrivere il sistema corrispondente e con l'E.G. si trova che è incompatibile.

L'E.G. usa le operazioni di somma e di prodotto e le loro inverse; in generale il quoziente di numeri in $\mathbb{Z}$ appartiene a $\mathbb{Q}$ e quindi le eventuali soluzioni sono in $\mathbb{Q}$ e non in $\mathbb{Z}$. In ogni caso la soluzione è unica.

9. La matrice dei coefficienti ha rango massimo, quindi la soluzione è unica ed è costituita da numeri di $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ perchè quest'ultimo è un campo.

E 1. Si ha $x + y = 0$. 3. I vettori sono indipendenti.

4. $v = e_1 + 2e_2 - e_3 + 3e_4$.

5. Si ottiene la matrice di elementi $a_{11} = 5/2$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 5/2$.

6. Le matrici e_{ij} , scritte come vettori colonna, sono la base canonica di $\mathbb{R}^6$; $A = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{21}e_{21} + a_{22}e_{22} + a_{23}e_{23}$.

7. $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 + c_4A_4 = 0$ corrisponde al sistema $-c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 0$, $2c_2 - 2c_3 = 0$, $c_3 - c_4 = 0$, $c_4 = 0$, che ammette la sola soluzione banale.

5.E 1. Il vettore ha componenti 10, 1, -1.

$$2. \quad w = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right|$$

$$3. \quad (AB)C = A(BC) = \left| \begin{array}{cc} -7 & 2 \\ -2 & 1 \end{array} \right|. \quad 4. \quad (a) \text{ No; } (b) \quad AB = \left| \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

5. $C = AB$ è una matrice 3×2 . La seconda riga è il prodotto della seconda riga di A per B e si ha $c_{21} = 15$, $c_{22} = 4$.

6. Si. 7. $AB = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}$, $BA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ ab & b & 1 \end{vmatrix}$.

10. P e PA sono ottenute rispettivamente da I e da A scambiando la prima con la seconda riga; AP è ottenuta da A scambiando la prima con la seconda colonna.

12. $\xi = x_3 v_3 + \xi_0$ dove v_3 ha componenti $-7/5, -4/5, 1, 0$ e ξ_0 ha componenti $7/5, -6/5, 0, 1$.

6.E 2. B non è invertibile.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

3. La matrice A dei coefficienti è non singolare e risulta:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \xi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{vmatrix}$$

7.E 1. P è ottenuta da I scambiando i vettori e_3 ed e_4 ; su PA si può effettuare l'E.G. senza scambi di righe e si trovano la matrice singolare S e la matrice L :

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Per le matrici A e B si trova rispettivamente:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & -5 & \\ & & 1 \end{vmatrix}, \quad U = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$P = I, \quad L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{vmatrix}, \quad U = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO I. 2. Si tratta di vedere se il sistema $Ax = w$ è compatibile. Riordiniamo le righe di A mettendo, dopo la prima riga, la quarta, la

seconda e la terza ed effettuiamo l'E.G.. A partire dalla tabella:

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right| \quad \text{si ottiene} \quad \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right|$$

Il sistema è pertanto compatibile e w si esprime come combinazione lineare delle colonne di A con pesi $\alpha_1=1, \alpha_2=-1, \alpha_3=1, \alpha_4=-1$.

Si considerino le matrici:

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \text{il loro prodotto} \quad EF = \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

la matrice nulla se e solo se $c=d=0$. Quindi si può scegliere F in modo che sia non nulla prendendo $a=b=1$.

ESERCIZIO II 1. Convienne effettuare l'E.G. su A e simultaneamente sui termini noti dei tre sistemi; a partire da

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right|, \quad \text{si ottiene} \quad \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{array} \right|$$

Ognuno dei tre sistemi ammette un'unica soluzione; per il primo, per esempio, si trova la terna ordinata di numeri 4, 2, -1.

$\text{rg}(A) = 2$. $\Delta = \text{Span}(v_3, v_4)$ dove $v_3 = (-8/7, -1/7, 1, 0)$ e $v_4 = (-1/7, 6/7, 0, 1)$.

3. Se A commuta con tutte le matrici, essa commuta anche con le matrici elementari:

$$e_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad e_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Imponendo che $A e_{12} = e_{12} A$ si trova $a_{21} = 0, a_{11} = a_{22}$; imponendo che $e_{21} A = A e_{21}$ si trova $a_{12} = 0$.

ESERCIZIO III. 2. La matrice A è triangolare superiore quindi basta effettuare l'E.G. su A e la matrice identità:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \quad \text{ottenendo} \quad \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

da cui si legge la matrice inversa.

3. Si può effettuare l'E.G.; a partire da:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & s \\ 0 & 1 & s+5 & 1 \\ s & 2s & 2 & s^2 \end{array} \right| \quad \text{si ottiene} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & s \\ 0 & 1 & s+5 & 1 \\ 0 & 0 & 2+s & 0 \end{array} \right|$$

Per ogni s , con $s \neq -2$, il sistema ammette un'unica soluzione; per $s = -2$ il sistema è ancora compatibile ed ammette infinite soluzioni.

Capitolo 2: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

2.E 1. Le matrici di S sono caratterizzate dall'avere uguali gli elementi di posto 1,2 e 2,1; tenuto conto di ciò si può provare che S è chiuso rispetto alle operazioni, infatti:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{vmatrix} \in S, \quad \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c \end{vmatrix} \in S.$$

Una base è costituita dalle matrici:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Per provare che è un sottospazio si faccia lo stesso ragionamento dell'esercizio 1. La dimensione è 3 in quanto una base è costituita da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Basta definire le operazioni come in 1.2. Una base è costituita dai polinomi $1, x, x^2, x^3, x^4$ che ovviamente generano; essi sono linearmente indipendenti in quanto si ha $c_0 \cdot 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = 0$ se e solo se i coefficienti sono tutti nulli (principio di identità dei polinomi). Pertanto $\dim(\mathbb{R}_4[x]) = 5$.

4. L'insieme dei polinomi di grado esattamente 4 non è un sottospazio vettoriale in quanto, per esempio, la differenza di due polinomi di grado quattro e con lo stesso coefficiente di x^4 è un polinomio di grado ≤ 3 e quindi non appartiene all'insieme.

5. Una base è costituita dalle matrici:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Per ipotesi si ha $c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ ed almeno uno dei coefficienti è diverso da zero; sia esso c_i , allora si può dividere la relazione per tale numero e ricavare $\mathbf{v}_i$ in funzione dei rimanenti.

4.E 1. Non sono una base di $\mathbb{R}^3$; $\mathbf{w} \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ma i pesi che lo rappresentano come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ non sono unici, per esempio $\mathbf{w} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 = 4\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$.

2. La matrice che li ammette come vettori colonna ha rango 2.
3. Risulta $\dim(W) = 2$ ed una base è costituita dai primi due vettori.
4. I vettori sono indipendenti e se consideriamo v, w, e_3 , la corrispondente matrice ha rango 3.
5. Scriviamo i vettori come colonne di una matrice A e scambiamo la prima con la terza riga. Al primo passo dell'E.G. si ottiene:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & k^2-1 \end{vmatrix} \quad \text{e per } k \neq 1 \quad \text{si ha} \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k^2-k \end{vmatrix}.$$

Quindi per $k \neq 0, 1$ $rg(A) = 3$; per $k = 0$ $rg(A) = 2$. Per $k = 1$ basta calcolare la matrice iniziale e vedere che ha rango 1. Quindi $\dim(W) = 3$ per ogni $k \neq 0, 1$; $\dim(W) = 2$ per $k = 0$; $\dim(W) = 1$ per $k = 1$.

7. Nel primo caso lo spazio generato dalle colonne di S è fatto di vettori con la terza coordinata nulla, mentre per A la terza coordinata è variabile in funzione di un parametro. Nel secondo caso il discorso è analogo.

9. Consideriamo, oltre ai vettori dati, tutti i vettori canonici i quali sono una base di $\mathbb{R}^n$. Ne segue che $v_1, \dots, v_k, e_1, \dots, e_n$ sono un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$. Se da essi, così ordinati, estraiamo una base con l'E.G. otteniamo i primi k vettori assegnati più $n-k$ fra i vettori canonici (cfr. 4.6 del capitolo 2.).

5.E 1. I tre vettori sono dipendenti ma i primi due sono indipendenti; equazioni parametriche: $x_1 = t + 2t'$, $x_2 = 2t + 3t'$, $x_3 = t + t'$, $x_4 = t$; ricavando i parametri dalle ultime equazioni si ha $3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$, $x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$.

2. Sostituiamo le matrici con vettori colonna; essi sono dipendenti ed i primi due indipendenti. Le equazioni parametriche sono: $x_1 = t$, $x_2 = t'$, $x_3 = 0$, $x_4 = t + t'$; le equazioni cartesiane sono: $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - x_4 = 0$.

3. $W = \text{Span}(v_1, v_2)$ ha equazioni parametriche $x_1 = t - t'$, $x_2 = t + t'$, $x_3 = t + t'$ e la corrispondente sottovarietà ha equazioni parametriche: $x_1 = t - t' - 1$, $x_2 = t + t' + 2$, $x_3 = t + t' + 1$, ed equazione cartesiana $x_2 - x_3 - 1 = 0$.

4. Risolvendo il sistema si trovano per il sottospazio W le equazioni parametriche $x_1 = -5t + 3t'$, $x_2 = -4t + 2t'$, $x_3 = t$, $x_4 = t'$; per la sottovarietà infine si ha: $x_1 = -5t + 3t' + 1$, $x_2 = -4t + 2t'$, $x_3 = t + 1$, $x_4 = t' + 1$.

5. $\dim(W') = 1$; $x = -5t + 1$, $y = -4t - 1$, $z = 3t$.

5.E 1. I generatori di U sono indipendenti, quindi $\dim(U) = 2$ e passando da equazioni parametriche a cartesiane si trova $x_3 - x_4 = 0$, $2x_1 -$

$3x_2 + x_3 = 0$. Analogamente $\dim(W) = 3$ e si trovano le seguenti equazioni parametriche $x_1 = a + 2b + 3c$, $x_2 = 2a + 3b + 3c$, $x_3 = 3b + 2c$, $x_4 = 3b + 5c$ (a, b, c parametri). I cinque vettori assegnati sono un sistema di generatori per $U + W$ e la matrice che li ammette come vettori colonna ha rango 4, quindi $\dim(U + W) = 4$. Per la formula di Grassmann $\dim(U \cap W) = 1$. Per determinarne una base si può imporre che le coordinate di un vettore variabile in W verifichino le equazioni cartesiane di U . Sostituendo si trova $c = 0$, $2a + b = 0$ ed un vettore possibile ha componenti 3, 4, 6, 6.

2. Per U si trova, per esempio, la base u_1, u_2, u_3 e quindi $\dim(U) = 3$; inoltre $\dim(W) = 3$. La matrice che contiene per colonne le due basi ha rango 4 quindi $\dim(U + W) = 4$. Dalla formula di Grassmann si ricava $\dim(U \cap W) = 2$.

3. Si ha $\dim(U) = 2$, $\dim(W) = 1$. Inoltre $\mathbb{R}^3 = U + W$ perchè u_1, u_2, w_1 sono indipendenti. $w_1 \notin U$ perchè ha la terza coordinata nulla (perchè?) e quindi $U \cap W = \{0\}$.

4. Convienne scrivere le matrici come vettori colonna. U ha equazioni cartesiane $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$ ($\dim(U) = 2$); W ha l'equazione cartesiana $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ ($\dim(W) = 3$); $\dim(U \cap W) = 1$ ed una base è costituita dal terzo generatore di W .

5. Basta prendere una retta ed un piano che la contenga.

6. I vettori sono indipendenti. Dal punto di vista del calcolo conviene aggiungere i vettori canonici ordinati da e_5 ad e_1 ; usando l'E.G. si può completare con e_5 ed e_4 .

7. Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO I. 1. Dopo aver scambiato la prima con la terza riga effettuiamo l'E.G.; a partire da:

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2+t & 1-3t & 0 \\ 1+t & 0 & 2t+2 & 0 & -1 \end{array} \right|, \text{ si ha } \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+t & -3t & 0 \\ 0 & 0 & -t(1+t) & -1+2t+t^2 & -1 \end{array} \right|$$

Se $t \neq -1$, $\text{rg}(A_t) = 3$, il sistema è compatibile e w verifica la condizione richiesta; se $t = -1$, $\text{rg}(A_{-1}) = 2$ ed il sistema è incompatibile.

2. Si ha $x_1 = 2t_1 + t_2$, $x_2 = 2t_2$, $x_3 = t_1 + t_2 + t_3$, $x_4 = t_3$ e si deduce l'equazione cartesiana $2x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0$.

3. Falso. Infatti se A è singolare il sistema $Ax = 0$ ammette almeno una soluzione $\xi \neq 0$; e risulta $A\xi = 0 = A0$. Se A è non singolare moltiplicando a sinistra per A^{-1} l'uguaglianza $Ax = Ay$ si ha $x = y$.

ESERCIZIO II. 1. Indichiamo con b^1, b^2 i due vettori colonna di B . Se esiste una matrice C soluzione di $AX = B$ e quindi tale che $AC = B$, i suoi

vettori colonna c^1, c^2 sono rispettivamente soluzioni dei sistemi $Ax = b^1$ e $Ax = b^2$ e viceversa, ovvero questi ultimi due sistemi devono essere simultaneamente compatibili. Effettuando l'E.G. si trova:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3/5 & 1 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k+1 \end{array} \right|,$$

quindi deve porsi $k = -1$.

2. Risolvendo il sistema a scala che rappresenta U si trova $\dim(U) = 2$ ed una base è costituita dai vettori u_1, u_2 di componenti rispettivamente $-1, -1, 1, 0$ e $1, 2, 0, 1$. Per W basta effettuare l'E.G. sulla matrice che ha per vettori colonna w_1, w_2, w_3 ; i primi due risultano essere una base quindi $\dim(W) = 2$. Si ha $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ se e solo se $\mathbb{R}^4 = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$. I vettori u_1, u_2, w_1, w_2 sono un sistema di generatori per $U + W$ e la matrice Q che li contiene per colonne ha rango 4; ne segue che $\dim(U + W) = 4$, cioè $U + W = \mathbb{R}^4$. Dalla formula di Grassmann si deduce che $\dim(U \cap W) = 0$ e solo il sottospazio nullo ha questa dimensione.

3. Per l'E.G. non occorre effettuare scambi di righe e si trova

$$A = LDU = \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 1 & 2/5 & 1 & 0 & 0 & 14/5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \quad \text{dove } U = L^T.$$

ESERCIZIO III. 1. Siano $C, D \in W$, proviamo che $C + D \in W$. Infatti, indicati con c^1, c^2, c^3 i vettori colonna di C e con d^1, d^2, d^3 quelli di D , risulta $c^1 - 2c^2 + c^3 = 0$ e $d^1 - 2d^2 + d^3 = 0$. I vettori colonna di $C + D$ sono $c^1 + d^1, c^2 + d^2, c^3 + d^3$ e risulta $(c^1 + d^1) - 2(c^2 + d^2) + (c^3 + d^3) = c^1 - 2c^2 + c^3 + d^1 - 2d^2 + d^3 = 0$. Analogamente si prova che $\alpha C \in W$. Osserviamo che se $C \in W$ il suo terzo vettore colonna è determinato dai primi due (che sono arbitrari) in quanto $c^3 = -c^1 + 2c^2$; per trovare una base di W basta scrivere le quattro matrici della base canonica di $M_2(\mathbb{R})$ ed aggiungere a ciascuna di esse la terza colonna così come abbiamo indicato. Pertanto $\dim(W) = 4$.

2. Chiaramente $\dim(U) = 2$. Effettuiamo l'E.G. sulla matrice che ha come vettori colonna ordinatamente i generatori di W e la base di U . Si ottiene:

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|.$$

Da essa si legge che $\dim(W) = 2$, $\dim(U + W) = 3$ (w_1, w_2, u_2 sono una base di $U + W$), e per la formula di Grassmann $\dim(U \cap W) = 1$. Inoltre $u_1 \in \text{Span}(w_1, w_2) = W$ (perchè?) quindi è una base per l'intersezione.

3. Se effettuiamo una E.G. su A ottenendo la matrice a scala S e la

fattorizzazione $PA = LS$, l'E.G. su PA avviene senza scambi di righe e come risultato si ottiene la stessa matrice S la quale contiene i pivots sulle colonne $j_1, j_2, \dots, j_r$. La matrice A' costituita dalle prime r righe e le colonne $j_1, j_2, \dots, j_r$ di PA è una sottomatrice quadrata di A di ordine r non singolare per costruzione. Se si orla A' con una ulteriore riga e colonna di A si ottiene una matrice A'' singolare in quanto la sua riduzione a scala contiene una riga di zeri (stiamo qui sfruttando il fatto che la riduzione a scala di A' è la matrice S' ottenuta prendendo le prime r righe di S e le colonne $j_1, j_2, \dots, j_r$).

Viceversa se esiste una matrice A' estratta da A e con le proprietà volute, indichiamo con P' una matrice di permutazione per cui l'E.G. su $P'A'$ possa avvenire senza scambi di righe. Sia quindi P la matrice di permutazione tale che la sottomatrice $P'A'$ sia ottenuta dalle prime r righe di PA . Procedendo con l'E.G. su PA si effettuano almeno r passi in quanto le righe di A' sono indipendenti; i passi sono esattamente r in quanto è singolare ogni matrice A'' ottenuta da A' orlando con una riga e colonna di A . Pertanto $\text{rg}(A) = r$.

ESERCIZIO IV. 1. Risulta $\xi = x_5 v_5 + \xi_0$ dove v_5 ha componenti $-1, 1, 0, -1, 1$ e ξ_0 ha componenti $6, -5, 3, -1, 0$.

2. Se A è singolare, per la proposizione 6.13 esiste $\xi \neq 0$ tale che $A\xi = 0$. Pertanto $B(A\xi) = (BA)\xi = 0$ e quindi BA è singolare. Per la matrice AB possiamo supporre che B sia non singolare in quanto, se B è singolare siamo nel caso precedentemente trattato. Il sistema $Bx = \xi$ ammette un'unica soluzione η e quindi $(AB)\eta = A\xi = 0$.

3. Si ha $A^2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $A^3 = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Le matrici date appartengono a W e si possono rappresentare come vettori colonna di $\mathbb{R}^3$ di componenti rispettivamente $1, -2, 1$; $1, -4, 1$; $1, -6, 1$. Si vede subito che tali vettori sono dipendenti; i primi due sono indipendenti e si possono completare ad una base di W prendendo la matrice che corrisponde al vettore $e_3 \in \mathbb{R}^3$.

Capitolo 3: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

2.E 1. $\det(A) = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad \det(B) = -55.$$

2. $\det(A_t) = 4t^2 - 3t = 0$ per $t = 0, 3/4$.

3. Le permutazioni che hanno 1 al primo posto sono:

1234, 1342, 1423 con segno +1 e 1243, 1324, 1432 con segno -1.

quelle che hanno 2 al primo posto sono:

2143, 2314, 2431 con segno +1 e 2134, 2341, 2413 con segno -1.
etc.

4. $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + \dots$ (mancano 18 addendi!).

5. L'espressione 2.4 contiene in questo caso solo un addendo non nullo.

6. Basta sviluppare secondo gli elementi della prima riga e iterare il procedimento.

3.E 1. $\det(A^{-1}A) = \det(I) \Rightarrow \det(A^{-1})\det(A) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

2. $\det(C^{-1}AC) = \det(C^{-1})\det(A)\det(C) = \det(A)$ per l'esercizio 1.

3. Se A ha i vettori riga $a_1, \dots, a_n$, la matrice αA ha i vettori riga $\alpha a_1, \dots, \alpha a_n$. Applicando la linearità in ciascun vettore riga si ha:

$$\det(A) = \det(\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) = \alpha \det(a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) \\ = \alpha^2 \det(a_1, a_2, \dots, \alpha a_n) = \dots = \alpha^n \det(a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha^n \det(A).$$

A.E 1. Convieni usare l'E.G. sulla matrice A ; al primo passo non si devono effettuare scambi di righe e si trova la matrice:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

quindi $\det(A) = \det(A_1)$. Quest'ultimo conviene calcolarlo secondo gli elementi della prima colonna; risulta $\det(A) = -6$.

2. $\det(A_t) = 2t(t-1) \Rightarrow t = 0, 1$.

3. $\det(A_k) = -k^3(1-k)^2(k+1) \neq 0$ per $k \neq 0, \pm 1$.

4. $\text{Agg}(A) = A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

5. Indicata con A la matrice dei coefficienti del sistema risulta:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{vmatrix} \quad \text{e si ha la soluzione} \quad \begin{vmatrix} -3 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{vmatrix}.$$

6. I cofattori sono numeri interi e quindi $\text{Agg}(A)/\det(A)$ è una matrice ad elementi interi.

7. Per il teorema di Cramer il sistema $ax + by = -cz$, $a'x + b'y = -c'z$ ammette la soluzione:

$$x = \frac{\det \begin{vmatrix} -cz & b \\ -c'z & b' \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = z \frac{\det \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{vmatrix} a & -cz \\ a' & -c'z \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = -z \frac{\det \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

6. Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO I. 1. P è ottenuta da I permutandone i vettori. Se indichiamo con σ tale permutazione, i vettori riga di P sono nell'ordine $e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}$; i vettori colonna di P^T sono nell'ordine $e_{\sigma(1)}^T, e_{\sigma(2)}^T, \dots, e_{\sigma(n)}^T$ dove $e_{\sigma(i)}$ e $e_{\sigma(i)}^T$ hanno le stesse componenti (tutte nulle tranne la i -ma che vale 1). Effettuando il prodotto righe per colonne si trova $PP^T = I$ e quindi la tesi.

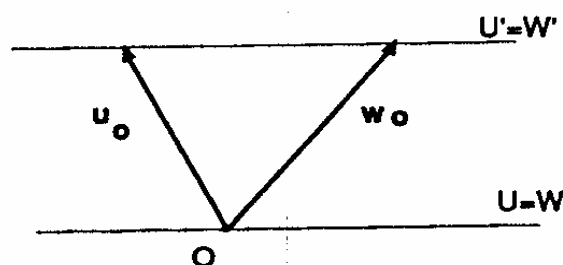
2. Si trova $\dim(W) = 2$ e le equazioni $x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0$, $x_2 + x_3 - 6x_4 = 0$.

3. $\det(A) = -16$ e quindi $\text{rg}(A) = 4$.

ESERCIZIO II. 1. Si ha $U' = \text{Span}(u) + u_0$ e $W' = \text{Span}(w) + w_0$ dove:

$$u = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad u_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{vmatrix}, \quad w_0 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{vmatrix}.$$

$U = \text{Span}(v)$ e $W = \text{Span}(w)$ sono lo stesso sottospazio in quanto $w = -3u$, quindi U' e W' sono due rette parallele fra loro in quanto parallele alla retta (sottospazio) $U = W$. Inoltre $w_0 \in U'$ in quanto si ottiene per $t = 1/2$ e quindi $U' = W'$.



2. Sia $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$; le sue coordinate rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ sono i coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3 . Calcolando $p(x)$ e $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$ per $x = 1$ si ottengono le condizioni perchè $p(x)$ appartenga a W , cioè il sistema omogeneo $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$, il quale fornisce le equazioni cartesiane di un sottospazio. Risolvendo il sistema si trova che una base per W è costituita dai

polinomi di coefficienti rispettivamente 1, -2, 1, 0 e 2, -3, 0, 1 ovvero $p_1(x) = 1 - 2x + x^2$, $p_2(x) = 2 - 3x + x^3$.

Sia $rg(A) = r$ e supponiamo che $Ax = b$ sia compatibile, cioè che appartenga allo spazio generato dai vettori colonna di A (cfr. 5.15 del capitolo 1). Una E.G. sulla matrice A' , che contiene b sull'ultima colonna, seleziona una base fra i suoi vettori colonna; quindi non seleziona (che dipende dai vettori colonna di A), ne segue che seleziona una base fra i vettori colonna di A e $rg(A') = rg(A)$. Viceversa supponiamo $rg(A) = rg(A') = r$. L'E.G. su A' permette di selezionare una base costituita da r fra i vettori colonna di A' , gli stessi che vengono selezionati per A visto che A e A' hanno lo stesso rango e b è l'ultima colonna di A' . Pertanto b dipende linearmente e quindi appartiene allo spazio generato dai vettori colonna di A ed il sistema è compatibile.

Capitolo 4: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

2.E

3. $x - 3z = 0$. 4. L'equazione si può scrivere $(\lambda + 3\mu)x + (\lambda + 3\mu)y - (\lambda + 3\mu)z + 5\mu = 0$ ovvero $x + y - z + k = 0$ dove $k = 5\mu/(\lambda + 3\mu)$, $(\lambda + 3\mu \neq 0)$. Il piano richiesto ha equazione $x + y - z - 4 = 0$.

5. a) un punto (sistema con soluzione unica); b) una retta (sistema con infinite soluzioni dipendenti da un parametro); c) l'insieme vuoto (sistema incompatibile).

6. $r \subset \alpha$ perchè l'equazione di α è combinazione lineare delle equazioni che rappresentano r .

I vettori di componenti 3, 1, 2 e 1, 1/3, 2/3, che vengono combinati linearmente, sono dipendenti; quindi essi generano una retta e non un piano. La retta è parametrizzata con due parametri di cui uno inutile!

Il punto non appartiene alla retta; esso appartiene al piano in quanto si ottiene per $t = 0$, $t' = 0$.

9. Un vettore direttore ha componenti -2, 2, 1; le corrispondenti equazioni parametriche sono $x = 1 - 2t$, $y = 2t + 3$, $z = t - 4$.

La retta è parallela al piano α e non è in esso contenuta.

11. $x = 3t + t'$, $y = t + t'$, $z = -2t + t'$.

Sostituendo le coordinate del punto variabile su r nell'equazione del piano si ottiene un'equazione (nel parametro) identicamente soddisfatta.

13. r ha equazioni cartesiane $z - y - 3 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$; α ha equazione $15x - 5y - 3z - 9 = 0$.

14. r ha eq.ni cartesiane $2x - y - 2 = 0$, $2z + y - 6 = 0$. 15. $3x - 5y + 2z = 0$.

16. r ha eq.ni $x - y - 1 = 0$, $3y - z = 0$. Basta verificare che il sistema delle equazioni di r e di α ammette infinite soluzioni.
17. $l : m : n = 3 : 1 : 3$; $l : m : n = 1 : 4 : 3$. 18. $a : b : c = 3 : -2 : 7$.
19. Sostituendo le coordinate del punto variabile su r nell'eq.ne del piano si trova una identità.
20. No. 21. Sì. 22. Le due rette non sono parallele in quanto i parametri direttori di $r : (-1, 2, 3)$, quelli di $s : (2, 3, 1)$ non sono proporzionali. La retta r non incontra il piano di eq.ne $x - y + z = 0$ che è uno dei piani su cui giace s , pertanto r non incontra s . Ne segue che le rette sono sghembe.
23. Per i coefficienti di giacitura di β si trova $a : b : c = 1 : -3 : -1$. Pertanto i due piani non sono paralleli e quindi neppure coincidenti.
24. Imponendo che il punto variabile su s verifichi l'equazione del primo piano che definisce r si ottiene $t = 0$ ed il punto $P_0 = (-1, 0, 1) \in s$ appartiene a tale piano. D'altra parte lo stesso punto verifica l'equazione del secondo piano che determina r e quindi è un punto di r . Le due rette sono quindi incidenti.

3.E 1. $x = 1 + 3t$, $y = 3 - t$; $x + 3y - 10 = 0$. 2. $l : m = -7 : 3$.

3. No, sono due rette parallele. 4. Il punto $R = (3t, 1+t) \in r$ appartiene ad s per $t = 0$ e quindi le rette sono incidenti. 5. $a(x+1) + b(y+3) = 0$ a, b parametri omogenei.

6. L'equazione cartesiana di r è $2x + y - 1 = 0$ e quindi $r \parallel s$; il fascio improprio ha equazione $2x + y + k = 0$ ed imponendo il passaggio per $P = (-2, 5)$ si ottiene $k = -1$ cioè la retta r .

7. Si tratta dell'asse delle y di equazioni cartesiane $x = 0$ ed equazioni parametriche $x = 0$, $y = t$.

8. Eliminando il parametro si trova l'equazione cartesiana $x + 3y - 7 = 0$ e l'equazione segmentaria $\frac{x}{7} + \frac{y}{7/3} - 1 = 0$.

10. La retta r ha equazione $x + y - 2 = 0$ e la retta richiesta ha equazione $x + y - 6 = 0$

5.E 1. Equazioni cartesiane di r : $2x + y + 2 = 0$, $3x - z + 4 = 0$. Eq.ne del fascio di piani: $2x + y + 2 + k(3x - z + 4) = 0$; il passaggio per $Q \Rightarrow 2 + 1/2 + 2 + k(3 - 3) = 0$ equazione priva di soluzioni. Il piano richiesto è l'unico non rappresentato nel fascio facendo uso del parametro non omogeneo k , cioè il piano $3x - z + 4 = 0$.

2. Siano $r = (1, -1, 1/2)$ e $s = (1, 2, -1)$ vettori direttori per le rette r ed s . Essi determinano la giacitura del piano $a : b : c = 0 : 3/2 : 3$ ed il piano ha eq.ne $(3/2)(y - 1) + 3(z - 1) = 0$.

3. La retta $r' = \alpha \cap \beta$ ha parametri direttori $l : m : n = -1 : 8 : 13$; la retta r richiesta è parallela ad r' ed è rappresentata da equazioni parametriche $x = -t, y = 8t, z = 13t + 1$.
4. Il punto $R = (-\frac{1}{2}t - 2, -3t + 4, t - 1) \in r$ verifica entrambe le equazioni di s per $t = 2$ quindi le due rette hanno in comune il punto $(-3, -2, 1)$ che si ottiene per tale valore del parametro. Per $t = 0$ si ottiene il punto $R_0 = (-2, 4, -1) \in r$ che non appartiene ad s ed il piano richiesto è il piano per R_0 e per s .
5. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{1} = 1$ eq.ne segmentaria; $x = t, y = t', z = 1 - (1/3)t - (1/5)t'$ eq.ni parametriche.
6. Sono possibili tutte e tre le forme ridotte perchè nessuno dei parametri direttori è nullo o, equivalentemente, la retta non è parallela ad alcuno dei piani coordinati. Forme ridotte:
- | | | |
|---------------|---------------------|--------------------|
| $y = -4x - 2$ | $x = -(1/4)(y + 2)$ | $x = (1/2)(1 - z)$ |
| $z = 1 - 2x$ | $z = (1/2)y + 2$ | $y = 2z - 4.$ |
7. Il piano per $P = (0, -1, -1)$ e parallelo al piano dato ha eq.ne $2x - y - 3z - 4 = 0$; il piano per P e per s ha eq.ne $x + 3y - z + 2 = 0$. I due piani indicati individuano una retta r che è certamente complanare con s ; occorre verificare che non sia ad essa parallela.
8. Il vettore OR ha componenti $3\tau + 1, -2\tau, 2 - \tau$ e la condizione di parallelismo implica $3\tau + 1 + 2\tau + 2 - \tau = 0$, cioè $\tau = -3/4$, cui corrisponde il punto $R = (-5/4, 3/2, 5/4)$.
9. $R = (2t, t - 2, 2 - t), S = (2\tau - 1/2, -\tau, 3\tau)$; v ha componenti $2\tau - 2t - 1/2, -\tau - t + 2, 3\tau - 2 + t$. La condizione di parallelismo si scrive:
- $$\frac{2\tau - 2t - 1/2}{4} = \frac{-\tau - t + 2}{-2} = \frac{3\tau - 2 + t}{-3}$$
- la cui, uguagliando i primi due rapporti si ricava $t = 7/8$; uguagliando il secondo al terzo si ottiene $\tau = 5/8$. In corrispondenza si hanno i punti $R = (7/4, -9/8, 9/8)$ ed $S = (3/4, -5/8, 15/8)$.
10. Le rette $r = \alpha \cap \beta, s = \alpha \cap \gamma, p = \beta \cap \gamma$ sono parallele in quanto hanno gli stessi parametri direttori $l = 2, m = 1, n = 1$. Per controllare che sono distinte si può considerare un punto di r , per esempio $R = (1, 1, 0)$, e verificare che $R \notin s$ e $R \notin p$. Con lo stesso metodo si può controllare che s e p sono distinte.
1. Tale retta deve appartenere al piano α per P e l'asse z ed al piano β per P parallelo al piano γ . Eq.ne fascio di asse l'asse z è: $x + ky = 0$; eq.ne piano α : $x + y = 0$; eq.ne piano β : $2(x + 1) - 3(y - 1) + 5(z + 2) = 0$. I parametri direttori di r sono $l = 1, m = -1, n = -1$; poichè essa non è parallela all'asse z la condizione di complanarità di r e l'asse z equivale alla condizione richiesta.

12. Si tratta di equazioni lineari nei parametri, che rappresentano una sottovarietà affine parallela al sottospazio generato dai vettori v di componenti 3, 1, 1 e w di componenti 1, 4, -1. Poichè tali vettori sono indipendenti $\dim(\alpha) = 2$. Eq.ne cartesiana di α : $5x - 4y - 11z + 4 = 0$. L'asse y passa per O e non appartiene ad α ; il fascio di piani con questo asse sega α nel fascio di rette richiesto che ha eq.ni $x + kz = 0$, $5x - 4y - 11z + 4 = 0$ al variare del parametro non omogeneo k .

13. Se tale retta esiste, deve appartenere al piano α che passa per P ed r ed al piano β per P e per s . Eq.ne del piano α : $5x + 4y - 6z - 3 = 0$; eq.ne del piano β : $x - 5y - 4z - 15 = 0$. I parametri direttori della retta intersezione dei due piani non sono proporzionali nè a quelli di r nè a quelli di s e quindi la retta r è l'unica che risolve il problema.

14. Il piano del fascio di asse la retta s ha eq.ne $x + z + k(y - x - 6) = 0$ ovvero $(1 - k)x + ky + z - 6k = 0$. Un vettore direttore di r , di componenti 2, 1, -1, risulta parallelo ad un piano del fascio se $2(1 - k) + k - 1 = 0$, da cui si ricava $k = 1$.

7. Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO I. 1. Per $t \neq -1$ il sistema ammette l'unica soluzione $x = 1/4$, $y = 0$, $z = 0$ quindi la sottovarietà V_t non varia al variare di t ed ha dimensione 0. Per $t = -1$ il sistema dato è equivalente al sistema $4x + 4z = 1$, $y = 0$ che ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro essenziale; la corrispondente sottovarietà ha dimensione 1.

2. La retta passante per P e parallela ai due piani α, β (che individuino una retta, come nel nostro caso) è la retta per P parallela alla retta $t = \alpha \cap \beta$. Queste sole condizioni individuano la retta s di eq.ni parametriche $x = 7t$, $y = 11t$, $z = -3t$. Perchè il problema abbia soluzione occorre che quest'ultima sia incidente alla retta r di eq.ni $x + z - 2 = 0$, $y + 3z - 1 = 0$. Infatti si trova che per $t = 1/2$ il punto $S = (7/2, 11/2, -3/2)$ appartiene ad r .

3. I vettori u_1 e u_3 sono una base per U il quale ammette eq.ni parametriche $x_1 = 2t + 2t'$, $x_2 = 4t + t'$, $x_3 = -2t - t'$, $x_4 = t'$, $x_5 = 2t + t'$. Eliminando i due parametri si ottengono le eq.ni cartesiane $x_3 + x_5 = 0$, $x_1 - x_4 - x_5 = 0$, $x_2 + x_4 - 2x_5 = 0$.

ESERCIZIO II. 1. Eliminando il parametro si trovano per s le eq.ni cartesiane $y + z + 2 = 0$, $x + 2z - 3 = 0$. Il primo dei due piani scritti appartiene al fascio di asse r in quanto si ottiene combinando linearmente le due eq.ni che definiscono r con pesi 1 e -1. Ne segue che r ed s sono complanari ed appartengono al piano β di eq.ne $y + z + 2 = 0$ su cui giace anche la retta p .

Il sottospazio W ha dimensione 3 ed è rappresentato dall'eq.ne $x_4 - x_3 = 0$. $U \cap W$ ha eq.ni cartesiane $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ ed una base per tale sottospazio è fornita dai vettori di componenti $-1, 1, 0, 0$ e $0, 0, 1, 1$.

$\alpha_1 s + \alpha_2(s + 2t) + \alpha_3(s + t + u) + \alpha_4(s + t + u + 2v) = 0 \iff$
 $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)s + (2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)t + (\alpha_3 + \alpha_4)u + 2\alpha_4v = 0$ e per l'indipendenza dei vettori $s, t, u, v \iff \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \alpha_4 = 0$. Per tale sistema la soluzione è unica e quindi i vettori proposti sono indipendenti.

Capitolo 5: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

1.E 1. Effettuando l'E.G. si trova $rg(A) = 3$, quindi è suriettiva: $Im(A) = \mathbb{R}^3$; $ker(A)$ è generato dal vettore v di componenti $-3/5, -11/5, 1, 1$; $Im(A^T)$ ha per base i tre vettori riga di A ; poichè $dim(ker(A^T)) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow ker(A^T)$ è il sottospazio nullo, che non ha base.

Scambiando le ultime due righe ed effettuando l'E.G. si trova che per $t \neq 1$ $rg(A_t) = 3$; per $t = 1$ $rg(A_1) = 2$. Poichè $dim(ker(A_t)) = 4 - rg(A) \Rightarrow dim(ker(A_1)) = 2$.

$rg(A) = 3$ quindi $Im(A) = \mathbb{R}^3$. $ker(A)$ è generato dai vettori $(-6/7, -16/7, 1, 0), (1/7, 12/7, 0, 1)$.

$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; $Im(A) = \mathbb{R}^2$; $ker(A)$ è generato dal vettore di componenti $-1/3, -2/3, 1$, una base di $Im(A^T)$ è costituita dai due vettori riga di A ; $ker(A^T) = \{0\}$.

2.E 1. L'applicazione è suriettiva. La controimmagine è data dal sistema $Ax = b$ dove b ha componenti $-1, 0, 3$; si tratta di una sottovarietà lineare di dimensione 1 di eq.ni $x_1 = -3t + 7, x_2 = -11t + 2, x_3 = 5t - 4, x_4 = 5$.

Per $t \neq 1$ l'applicazione è suriettiva; non è mai iniettiva.

3. $B = A^T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$; $rg(B) = 3 \Rightarrow B$ è iniettiva e non suriettiva.

1.E 1. La trasformazione si scrive in forma matriciale:

$$x = Ax', \quad A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \det(A) = -3 \neq 0$$

Quindi si ha un cambiamento di coordinate e si trova:

$v'_1 = 2v_1 + v_2 + v_3$, $v'_2 = -v_1 + v_2 + v_3$, $v'_3 = -v_3$; e le inverse:

$$v_1 = \frac{1}{3}v'_1 - \frac{1}{3}v'_2, \quad v_2 = \frac{1}{3}v'_1 + \frac{2}{3}v'_2 + v'_3, \quad v_3 = -v'_3.$$

2. La matrice A che contiene per righe le coordinate di w_1, w_2, w_3 è non singolare e i tre vettori sono una base. Indicate con x le coordinate relative alla base v_1, v_2, v_3 e con y quelle relative all'altra, si ha la trasformazione di coordinate $x = A^T y$ da cui segue $y = (A^T)^{-1} x$ e:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. La matrice A generica di $M_2(\mathbb{R})$ ha coordinate $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$; $A \in V \Rightarrow a_{12} - a_{21} = 0$, equazione di un sottospazio di dimensione 3. Scritte le matrici $A_i \in V$ e $A'_i \in V$ come vettori colonna a_i e a'_i di $\mathbb{R}^4$, si vede che sono indipendenti sia le prime tre che le seconde quindi sono due basi in V e risulta $a_1 = a'_3 - a'_2$, $a_2 = 2a'_3 - a'_2$, $a_3 = -a'_1$.

4.E 1. In forma matriciale si ha:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

e la matrice è non singolare. Ne segue che $\text{Ker}(T) = \{0\}$ ed $\text{Im}(T) = V$. Poichè v ha coordinate 3, -1, 1 il suo trasformato ha coordinate 7, 2, 3 e quindi $T(v) = 7v_1 + 2v_2 + 3v_3$.

$$2. \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \det(A) \neq 0, \text{ si tratta di un automorfismo.}$$

Si ha:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = C^{-1}AC = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$3. \quad \text{La trasformazione è } y = Ax, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \det(A) = 0. \text{ Non}$$

è possibile interpretare le formule come un cambiamento di coordinate, ma esse rappresentano un endomorfismo di V in cui $\text{Im}(T) \subset V$ è un sottospazio proprio e quindi non tutti i vettori di V sono nell'immagine. Il vettore $w \in \text{Im}(T) \Leftrightarrow$ il sistema $Ax = b$, dove b ha componenti -1, 1, 1, risulta compatibile; si trova quindi $w \notin \text{Im}(T)$.

4. La matrice A della trasformazione (nella base canonica) ha per colonne le componenti dei vettori v_1, v_2, v_3 e risulta non singolare se e solo se $\det(A) = t^2 + 2t - 2 \neq 0$ ovvero $t \neq -1 \pm \sqrt{3}$. La trasformazione inversa è rappresentata, nella base canonica, dalla matrice A^{-1} . In questo caso non conviene calcolarla tramite l'E.G., in quanto i moltiplicatori sono rapporti di polinomi in t . Conviene calcolare $\text{Agg}(A)$ e poi dividere per $\det(A)$: si trova

$$A^{-1} = \frac{1}{t^2 + 2t - 2} \begin{vmatrix} t & t & -2 \\ 1-t^2 & 2t-1 & t-2 \\ -1 & -1 & t+2 \end{vmatrix}.$$

5. $T(a_1) = T(e_1) + 3T(e_2) + T(e_3) = b_1$, $T(a_2) = T(e_1) - 3T(e_2) - 5T(e_3) = b_2$, $T(a_3) = T(e_1) - 3T(e_2) + T(e_3) = b_3$. Ricaviamo $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ in funzione di b_1, b_2, b_3 facendo uso dell'E.G.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_2 \end{matrix}.$$

si ottiene $T(e_3) = (1/6)(b_3 - b_2)$, $T(e_2) = (1/6)(b_1 - b_3)$, $T(e_1) = \dots$ e si devono ancora esprimere i vettori b_1, b_2, b_3 nella base canonica.

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \quad B^{-1}AB = \begin{vmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{vmatrix}.$$

Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO I. 1. Eq.ni parametriche di r : $x = -2t' + 2, y = t', z = 1$. $r = (-2t' + 2, t', 1)$, $S = (t, 2t, 1 - t)$; le componenti di v sono $-2t' - 2, 2t - t', -t$; e q ha parametri direttori $0, -1, 1$. Le condizioni di parallelismo sono $t + 2t' - 2 = 0, 2t - t' = t$ da cui si ricava $t = t' = 2/3$ ed in corrispondenza i punti richiesti dal problema.

$$T\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \quad \text{ovvero la}$$

$$\begin{matrix} \text{trasformazione} & \begin{matrix} a' = 2a, \\ b' = b + c, \\ c' = b + c, \\ d' = 2d \end{matrix} & \text{di matrice} & A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}. \end{matrix}$$

a) sottovarietà affine (non sottospazio); b) sottospazio; c) non è un'equazione lineare e quindi non rappresenta una sottovarietà lineare.

ESERCIZIO II. 1. Facendo uso dell'E.G. si trova: $\text{rg}(A) = 4$ se $a \neq b$ e $a \neq 0$; $\text{rg}(A) = 3$ se $a = b$ e $a \neq 0$; $\text{rg}(A) = 2$ se $a = b = 0$. Sia A_0

la matrice A calcolata per $a = b = 0$; dall'eliminazione già fatta si vede che i primi due vettori colonna sono una base di $\text{Im}(A_0)$. Una base per $\ker(A_0)$ è fornita dai vettori $(0, 1, 0, 1)$ $(-1, 1, 1, 0)$.

2. Osserviamo che $3 \leq \dim(U + W) \leq 4$ e $0 \leq \dim(U \cap W) \leq 3$; quindi e) va scartato e per la formula di Grassmann vanno scartati anche a) e b).

3. $P_0 = (0, 0, 1)$. L'asse z passa per P_0 e non appartiene ad α , quindi il fascio di piani $y = kx$ lo sega nel fascio di rette richiesto che ha equazioni: $y = kx$, $x - 3y + z - 1 = 0$.

ESERCIZIO III. 1. Convien portare l'ultima eq.ne al primo posto. Si trova $\text{rg}(A) = 3$ per $t \neq -2$ ed in questo caso il sistema ha un'unica soluzione ovvero rappresenta una sottovarietà di dimensione 0. Per $t = -2$ $\text{rg}(A) = 2$ ed il sistema è ancora compatibile; la corrispondente sottovarietà ha dimensione 1.

$$2. \quad X = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} = Y = XC = \begin{vmatrix} -x_1 + 3x_2 & 2x_1 - 6x_2 \\ -x_3 + 3x_4 & 2x_3 - 6x_4 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{è la matrice della trasformazione ed il primo e terzo dei vettori colonna forniscono una base di } \text{Im}(T).$$

3. Retta r : eq.ni $x = -1, y = -1$, parametri direttori $(0, 0, 1)$;

retta s : eq.ni $x = z, y = z - 1$, parametri direttori $(1, 1, 1)$;

retta t : eq.ni $x = -2, z = y - 1$, parametri direttori $(0, 1, 1)$.

Dal loro confronto si vede che nessuna coppia è costituita da retta parallele. D'altra parte le rette sono a due a due sghembe in quanto i sistemi che rappresentano le intersezioni $r \cap s, r \cap t, s \cap t$ sono tutti incompatibili.

ESERCIZIO IV. 1. Consideriamo l'isomorfismo $V \rightarrow \mathbb{R}^4$ determinato dalla scelta di una base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$ di V e siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^4$ i corrispondenti di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. Possiamo completare $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ad una base scegliendo due fra i vettori canonici; siano essi per esempio $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_4$.

Si ha $\mathbb{R}^4 = \text{Span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \oplus \text{Span}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ e quindi $V = U \oplus W$ con $W = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

2. Sono infinite, rappresentate tutte dall'equazione $z = k(x - 3y)$ al variare del parametro reale k non nullo. Si tratta infatti, fissato $k \neq 0$, di un'equazione lineare che determina un'applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ il cui nucleo ha equazione $k(x - 3y) = 0$ cioè il sottospazio W . Viceversa se una trasformazione lineare del tipo indicato, e quindi di equazione $z = ax + by$, deve avere per nucleo il sottospazio $x - 3y = 0$ l'equazione $ax + by = 0$ deve essere equivalente alla precedente, ovvero $a : b = 1 : -3$.

3. Le rette r ed s sono parallele ed appartengono al piano β di equazione $x - y + z = 0$; inoltre $P \in \beta$. Le rette cercate sono quelle del piano β che passano per P , esclusa la retta per P e parallela ad r .

Capitolo 6: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

1.E 1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{14}$, $v_r = 7/\sqrt{6}$. 2. I vettori sono a due a due ortogonali ma uno di essi non ha modulo 1.

3. $\langle \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^1 \rangle = 1/6 + 4/5 + 1/30 = 1$, $\langle \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^2 \rangle = 1/6 + 25/30 = 1$; così procedendo si vede che i vettori colonna di A sono una base ortonormale.

2.E 1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 3$, $P\mathbf{x} = (1/3)\mathbf{y}$.

2. Convieni scegliere in W una base ortogonale e a tal scopo basta ortogonalizzare la base $\mathbf{v}, \mathbf{w}$. Si ottengono i vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}_1$ di componenti $-1/2, 1, 1/2$; poichè non interessa il modulo di tali vettori possiamo moltiplicare $\mathbf{w}_1$ per il fattore 2 e quindi assumere che abbia componenti $-1, 2, 1$. Risulta che il vettore $P\mathbf{u}$ ha componenti $1/2, -1/2, 0$.

3. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1$, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 2$, $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 3$; $\mathbf{u}_2$ ha componenti $-1/2, 1, 1/2$; $\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 5$, $\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$; $\mathbf{u}_3$ ha componenti $1/2, 1/2, -1/2$. Inoltre occorre ancora dividere ciascun vettore per il suo modulo: $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{3/2}$, $\|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{3/2}$.

4.E 1. Il vettore $\mathbf{r} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ è un vettore direttore per la retta r di intersezione dei due piani. I due versori della retta sono $\mathbf{u} = \pm(1/\sqrt{6})(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$ e perchè sia acuto l'angolo con il vettore $\mathbf{v}$ occorre che il coseno sia positivo, da cui la scelta del segno negativo.

2. Consideriamo i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{BA} = (1, -2, -3)$, $\mathbf{v} = \mathbf{BC} = (-2, -4, -2)$, $\mathbf{w} = \mathbf{CA} = (3, 2, -1)$. I tre punti non sono allineati perchè i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono indipendenti; risulta $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{w}\|$ e quindi il triangolo è isoscele; inoltre poichè $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$ esso non è rettangolo.

3. r ha eq.ni cartesiane $x = y = z$; il piano α per M ortogonale ad r ha eq.ne $x + y + z + 1 = 0$; $M' = \alpha \cap r = (-1/3, -1/3, -1/3)$.

4. Il versore della retta r_1 ha componenti $1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}$, esso è stato ottenuto scegliendo fra i due possibili quello con la prima componente positiva in quanto il verso delle t decrescenti corrisponde a quello delle x crescenti. In modo analogo si trova che il versore di r_2 ha componenti $1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}$. Per il coseno si trova il valore $5/6$.

5. Risulta $\cos \widehat{\alpha\alpha'} = \pm 1/3$. L'equazione del fascio di piani di asse r $(1+k)x - (1-k)y + (1-k)z + 1-k = 0$ e la condizione di ortogonalità con β implica $k = -1$.
6. L'eq.ne cartesiana di α è: $x + 3y - 2z - 5 = 0$. Il fascio di asse r ha eq.ne $x + ky + (k-2)z + 1 - 3k = 0$ e l'ortogonalità con α implica $k = -1$.
7. La retta richiesta si ottiene come intersezione del piano α passante per P ortogonale ad r e del piano β per P ed r . Per α e β si trovano rispettivamente le eq.ni $-3x + y - z = 0$, $x + 2y - z - 1 = 0$.
8. Sono le rette del fascio di centro P_0 ed appartenenti al piano passante per P_0 ed ortogonale ad r . α ha eq.ne $3x - y + z - 4 = 0$; la retta s per P_0 e per l'origine, di equazioni $x = y$, $2y = z$, non appartiene ad e quindi il fascio di piani di asse s sega α nel fascio di rette richiesto.
9. Determiniamo il piano α passante per O e parallelo ad r ed s . I parametri direttori di r sono $-2, -3, 1$ e quelli di s sono $1, -1, 0$. I parametri di giacitura di α sono $1, 1, 5$ ed il fascio ha eq.ne $x + y + 5z + k = 0$.
10. α ha eq.ne cartesiana $x + 2y - z + 1 = 0$; se non si vuole usare la formula (4.13) basta scrivere le eq.ni parametriche della perpendicolare ad α passante per P , r : $x = 1 + t$, $y = 3 + 2t$, $z = 2 - t$; $r \cap \alpha = H = (0, 1, 3)$ e $d(P, \alpha) = d(P, H) = \sqrt{6}$.
11. I vettori direttori di r ed s hanno rispettivamente componenti $1, -1, -2$ e $3, 1, -1$. Il vettore v ha componenti $3t' - t - 1$, $t' + t + 1$, $2t - t' + 1$ e le condizioni di ortogonalità con i due vettori direttori trovati danno luogo ad un sistema lineare di due eq.ni nelle incognite t e t' che ammette l'unica soluzione $t = -16/25$, $t' = 1/25$ cui corrispondono i punti $R = (-16/25, -9/25, 32/25)$ ed $S = (-22/25, 1/25, 24/25)$. Si tratta ora di scrivere equazioni per la retta passante per due punti.
12. Avendo già svolto l'esercizio precedente si può direttamente calcolare $d(R, S)$. Altrimenti si può usare il procedimento suggerito nell'esercizio 1.
13. Il piano α per P e perpendicolare ad r ha eq.ne $4x + 5y - 2z - 5 = 0$; $r \cap \alpha = H = (68/45, -1/9, 11/45)$, $d(P, H) = \sqrt{521}/3\sqrt{5}$.
14. Nel fascio di piani di asse la retta r e di eq.ne $x + (k-2)y + kz + 2k - 1 = 0$ il piano α parallelo alla retta s di parametri direttori $2, 1, -3$ corrisponde a $k = 0$ ed ha eq.ne $x - 2y - 1 = 0$. Fissato un punto sulla retta s , per esempio il punto $P_0 = (1, -1, -1)$, si ha che $d(r, s) = d(P_0, \alpha) = 2/\sqrt{5}$.

5.E

1. La quarta non è una circonferenza in quanto i coefficienti x^2 e y^2 non sono uguali. Per le altre, dopo aver diviso per il coefficiente di x^2 , si trova che sono tutte circonferenze tranne la terza.
2. (a) $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$. (b) $\beta = \pm r$. (c) $\alpha = 0$. (d) $\alpha = \pm r$, $\beta = 0$.
3. Non esistono perchè la circonferenza ha centro in $C = (2, 1)$ e raggio $r = \sqrt{5}$ mentre per il punto $P = (0, 1)$ si ha $d(P, C) < \sqrt{5}$.

1. L'intersezione fra la retta $y = x - 2$ e la circonferenza è rappresentata dall'eq.ne $6x^2 - 18x + 21 - k = 0$; perchè la retta sia tangente occorre che sia nullo il discriminante e ciò implica $k = 15/2$.

5. (a) A priori, per essere tangente all'asse y e con il raggio indicato, il centro deve trovarsi sulla retta $x = 3$, oppure $x = -3$ e quindi $C = (\pm 3, k)$. Imponendo l'ulteriore condizione $d(C, P_0) = 3$ si vede che i centri sono solo sulla retta $x = 3$ per $k = \pm\sqrt{5}$. (b) Basta imporre all'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ di essere verificata dalle coordinate dei punti assegnati; si trova il sistema $a + b + c + 2 = 0$, $2a + 2b + c + 8 = 0$, $3a + c + 9 = 0$ che ammette l'unica soluzione $a = -13/3$, $b = -5/3$, $c = 4$.

10. (a) Le rette sono parallele, il centro delle circonferenze è $C = (h+1, h)$ perchè deve giacere sulla linea mediana $x - y - 1 = 0$ mentre $2r = d(O, s) = \sqrt{2}$; si ottiene quindi $(x - h - 1)^2 + (y - h)^2 = 1/2$. (b) Il centro si trova su una delle due bisettrici p' e q' delle rette p e q . Esse si trovano imponendo che il punto $P(x, y)$ abbia la stessa distanza da p e da q :

$$d(P, p) = \frac{|3x - 4y|}{5} = \frac{|3x + 4y + 1|}{5} = d(P, q).$$

Eliminando i valori assoluti si ha $3x - 4y = \pm(3x + 4y + 1)$ ovvero le rette $p' : 6x + 1 = 0$, $q' : 8y + 1 = 0$. Se $C \in p'$ si ha $C = (-1/6, h)$ ed il raggio è $r = d(C, p)$ e si ottiene una famiglia di circonferenze dipendenti da un parametro. Si proceda analogamente per la retta q' .

11. È l'ellisse di semiassi $a = 1/2$, $b = 1/3$ e l'ascissa dei fuochi è $c = \pm\sqrt{5}/6$.

12. Per l'iperbole si trova $a = b = 2\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{6}$. Per l'ellisse si trova lo stesso valore del parametro c .

3.E 1. (a) No. (b) $C = (3/2, -1, 1/2)$, $r = \sqrt{3/2}$. (c) No.

Il centro ed il raggio della sfera sono $C = (3, 2, 0)$ ed $r = 1$. Il piano α_k variabile nel fascio ha equazione $x + y + z + k = 0$; imponendo che $d(C, \alpha_k) = r = 1$ si ottiene $k = -5 \pm \sqrt{3}$.

Il piano variabile nel fascio di asse r ha eq.ne $x + (k-2)y + kz + k - 5 = 0$; centro e raggio della sfera sono $C = (-1, 1, 2)$, $r = \sqrt{6}$. Imponendo che $d(C, \alpha_k) = \sqrt{6}$ si ottiene l'equazione $(4k - 8)^2 = 6(5 + 2k^2 + 4k)$ le cui soluzioni, se sono reali, determinano i piani richiesti.

13. Perchè sia tangente al piano $x = 0$ e raggio 3 il centro C deve avere coordinate del tipo $\alpha = \pm 3, \beta, \gamma$; inoltre deve risultare $d(C, A) = 3 = d(C, B)$. Sviluppando queste condizioni per $\alpha = 3$ si ottiene $\beta = -1, \gamma = 2$ oppure $\beta = 2, \gamma = -1$. Per $\alpha = -3$ si perviene ad un'equazione con radici complesse.

14. (a) Per la sfera si ha $C = (1, 1, -1)$, $R = 2$; inoltre $d(C, \alpha) =$

$1/\sqrt{3} < R$, il raggio della circonferenza è $r = \sqrt{11/3}$ ed il centro è $C' = (4/3, 2/3, -2/3)$. La proiezione ha eq.ni $x = 0, 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 4y + 4z - 1 = 0$.

6. Sottraendo le due equazioni si trova il sistema, equivalente a quello assegnato, di eq.ni $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, x - y = 0$, il quale rappresenta l'intersezione di una sfera S con un piano α . Poichè il centro (l'origine) di S appartiene ad α la circonferenza è massima ed ha lo stesso centro e raggio di S . La retta tangente giace sul piano α della circonferenza e sul piano β tangente in P alla sfera, cioè il piano ortogonale alla retta passante per i punti O e P . Si trovano le eq.ni $z = 1, x = y$.

7. Il piano α della circonferenza passa per C e per s ed ha equazione $x - y - z = 0$. Una delle sfere che passano per la circonferenza è quella con lo stesso centro e raggio, cioè $r = d(C, s) = \sqrt{2}/2$.

8. Si imponga all'eq.ne $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ di essere verificata dalle coordinate dei tre punti; si ottiene il sistema lineare $a + c + d + 2 = 0, -a + 2b + c + d + 6 = 0, 2b - c + d + 5 = 0$ che ammette soluzioni dipendenti da un parametro.

9. Basta intersecare una qualunque delle sfere ottenute nell'esercizio 8 con il piano dei tre punti, di equazione $2x + 2y + z - 3 = 0$.

7. Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO I. 1. I vettori $\mathbf{v} = (1, 1, 2), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_3 = (-1, -1, 1)$ sono vettori direttori per le tre rette e sono mutuamente ortogonali in quanto $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$. Per ottenere vettori orientati come richiesti occorre cambiare di segno sia $\mathbf{v}_2$ che $\mathbf{v}_3$; dividendo poi ciascuno per il suo modulo si ottengono le formule:

$$\mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i}' - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}'$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i}' + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}'$$

$$\mathbf{k} = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{i}' - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}'$$

(nell'inversione si è tenuto conto che la matrice delle prime formule è ortogonale e quindi l'inversa coincide con la trasposta).

Poichè $T(\mathbf{i}') = \mathbf{i}', T(\mathbf{j}') = \mathbf{j}', T(\mathbf{k}') = \mathbf{k}'$ abbiamo la matrice A relativa alla base $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$. Indicata con C è la matrice ortogonale che contiene per colonne le coordinate della base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ per la matrice di T relativa alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si ha $B = C^{-1}AC = C^T AC$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

2. Si può preventivamente trovare le rette incidenti a tre delle date e successivamente determinare quelle che risultino incidenti alla quarta. Scegliamo come rette la r , la s e l'asse z e determiniamo le rette che passano per il punto $P = (0, 0, a)$ dell'asse z e che sono complanari con r ed s ; esse sono intersezione del piano α_a per P ed r e del piano β_a per P ed s :

$$\alpha_a : (a-1)y + z - a = 0, \quad \beta_a : 3(a+1)x + 2(a+1)y + 3z - 3a = 0.$$

La retta $p_a = \alpha_a \cap \beta_a$, al variare del parametro a , si mantiene incidente all'asse z e complanare con r ed s . Perchè essa sia incidente alla retta q occorre che coincidano i punti

$$\alpha_a \cap q = (1, a/(a-1), 0), \quad \beta_a \cap q = (1, -3/2(a+1), 0).$$

e quindi deve essere $2a^2 + 5a - 3 = 0$ le cui soluzioni sono $a = -3$ e $a = 1/2$. Occorre ancora verificare che per tali valori di a le rette non siano parallele né ad r né ad s .

3. a) Facendo uso dell'E.G. si trova che una base per L_1 è costituita da v_3, v_2 , una base per L_2 è costituita da w_1, w_2 . $L_1 + L_2 = \text{Span}(v_3, v_2, w_1, w_2)$ e si trova che i quattro vettori sono indipendenti quindi $\mathbb{R}^4 = L_1 + L_2$; inoltre, per la formula di Grassmann $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.
b) Basta scrivere il vettore $z = av_3 + bv_2 + cw_1 + dw_2 = (av_3 + bv_2) + (cw_1 + dw_2) = z_1 + z_2$ dove $av_3 + bv_2 = z_1 \in L_1$ e $cw_1 + dw_2 = z_2 \in L_2$. Per determinare i pesi della combinazione lineare occorre risolvere il sistema che ha come matrice dei coefficienti la matrice dei vettori della base di $L_1 \cup L_2$ e per termine noto il vettore z . Eseguendo i calcoli si trova che z_1 ha componenti 1, 1, 1, 0 e z_2 ha componenti 0, 0, 2, -1.

ESERCIZIO II. 1. La trasformazione ha eq.ni $x' = z - y, y' = y, z' = z$ ed è quindi lineare e la matrice, nella base assegnata per V_O , è:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

In $\mathbb{R}^3$ si ha $\ker(A) = \text{Span}(e_1)$, $\text{Im}(A) = \text{Span}(a^2, a^3)$, a^2, a^3 vettori colonna indipendenti di A . Ne segue che $\ker(f) = \text{Span}(i)$ e $\text{Im}(f) = \text{Span}(v, w)$ con $v = -i + j, w = i + k$. Per provare (c) sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto variabile dello spazio $\mathcal{E}^3$. La retta passante per P_0 e parallela all'asse x ha equazioni $y = y_0, z = z_0$ ed interseca α in $P' = (z_0 - y_0, y_0, z_0)$, da cui la tesi.

2. Se (a) fosse vera dovrebbe essere $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ ma questo è falso; basta considerare l'esempio $A = B = I \in M_2(\mathbb{R})$ per il quale si ottiene $\det(I + I) = 4 \neq \det(I) + \det(I) = 2$. (b) è vera in quanto sappiamo che $\forall A \in M_m(\mathbb{R})$ si ha $\det(A) = \det(A^T)$ ed il determinante è

una funzione lineare dei vettori riga di A^T (che sono i vettori colonna di A). (c) è falsa, basta considerare lo stesso controesempio dato in (a).

3. La relazione $XA = (s+1)X$ che caratterizza le matrici di W può essere riscritta $XA = X(s+1)I$ in quanto le matrici scalari commutano, cioè $X(A - (s+1)I) = 0$, con $A - (s+1)I = \begin{vmatrix} -s & 0 \\ s & 1-s \end{vmatrix}$. Indicati con x_1, x_2 gli elementi della prima riga di X e con x_3, x_4 quelli della seconda, W corrisponde al sistema lineare omogeneo $-sx_1 + sx_2 = 0$, $(1-s)x_2 = 0$, $-sx_3 + sx_4 = 0$, $(1-s)x_4 = 0$, quindi W è un sottospazio per ogni s . La matrice D dei coefficienti ha rango 4 per $s \neq 0, 1$ ed in questi casi W è il sottospazio nullo. Per $s = 0, 1$ si ha $\text{rg}(D) = 2$ e la presenza di due variabili libere implica $\dim(W) = 2$.

ESERCIZIO III. 1. La retta r ha eq.ni $2x + y - 2 = 0$, $x + z - 4 = 0$. Il fascio di piani di asse r ha eq.ne $2x + y - 2 + k(x + z - 4) = 0$ ed il suo piano α_k , per formare con β un angolo pari a $\pi/3$, deve verificare la condizione

$$\cos \hat{\beta} \alpha_k = \frac{2 + k + 1}{\sqrt{(2+k)^2 + 1 + k^2} \cdot \sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2}.$$

cioè $4(3+k)^2 = 2[(2+k)^2 + 1 + k^2]$, un'equazione di secondo grado che, sviluppata, si abbassa di grado fornendo la sola soluzione $k = -13/8$ (non una radice doppia). Osserviamo però che nella rappresentazione del fascio abbiamo escluso il piano α di eq.ne $x + z - 4 = 0$ e per il quale risulta $\cos \hat{\beta} \alpha = \pm 1/2$.

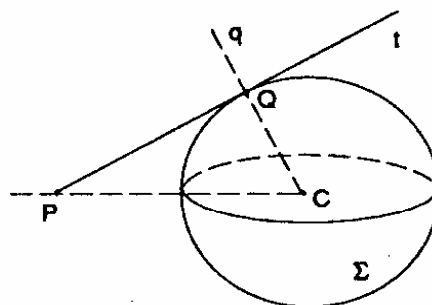
2. (a) I vettori u_1, u_2, u_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$; per ogni vettore $u \in \mathbb{R}^3$ si ha $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ in modo unico e la linearità implica che T è univocamente determinata comunque siano assegnati i vettori $T(u_1), T(u_2), T(u_3)$. (b) Il vettore $w_1 = v_1 - v_2$ ha componenti $0, -2, 0, 0$, $w_2 = v_2 + v_4$ ha componenti $1, 1, 1, 4$, $w_3 = v_2 - v_4$ ha componenti $-3, 1, -1, 0$. Poichè la matrice B che li contiene per colonne, ha rango 3 essi sono una base per $\text{Im}(T)$ che ha quindi dimensione 3. La matrice B è la matrice di T rispetto alla base u_1, u_2, u_3 di $\mathbb{R}^3$ e rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$; ne segue che l'applicazione è iniettiva. Osserviamo infine che nessuna applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ può essere suriettiva. Per determinare una base di $\text{Im}(T) \cap W$ usiamo, per esempio, il procedimento indicato in 6.10 del capitolo 2. Si deve prendere in esame la matrice

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che contiene nelle ultime due colonne vettori di una base di W . Il

vettore $\mathbf{x}$ di componenti $0, 0, 1, -1, 1$ genera $\ker(Q)$ e nell'isomorfismo $\varphi: \ker(Q) \rightarrow \text{Im}(T) \cap W$ corrisponde al vettore $0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + 1\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_3$.

3. La sfera Σ ha eq.ne $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$; $P \notin \Sigma$ inoltre se $C \in \Sigma$ e la retta t per P e Q è ad Σ tangente, la retta q passante per C e Q è ortogonale a t . Poichè $d(C, Q) = 3$, $d(P, C) = 5$ ne segue che $d(P, Q) = 4$ e quindi il punto Q appartiene alla sfera Σ' di centro P e raggio 4. Pertanto il punto Q appartiene alla circonferenza intersezione delle sfere Σ e Σ' . Dopo aver scritto l'eq.ne di Σ' si può procedere come nell'esercizio 6 di 6.E.



Capitolo 7: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

1.E 1. Indichiamo con U la retta (sottospazio) di $\mathcal{V}_O$ ortogonale al piano W . Si ha quindi $\mathcal{V}_O = U \oplus W$; i vettori non nulli di U si proiettano nel vettore nullo quindi verificano $P\mathbf{v} = \mathbf{o} = 0\mathbf{v}$ e sono autovettori di peso $\lambda = 0$; i vettori non nulli di W verificano invece $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$ e quindi sono autovettori di peso $\lambda = 1$. Abbiamo quindi gli autospazi e le corrispondenti dimensioni. Una base di autovettori si ottiene prendendo un vettore non nullo in U ed una coppia di vettori indipendenti in W ; ovviamente tale scelta non è unica.

2. Osserviamo che l'operatore $S: \mathcal{V}_O \rightarrow \mathcal{V}_O$ di simmetria rispetto al piano W è legato all'operatore P di proiezione sullo stesso sottospazio dalla relazione $S = 2P - I$ in quanto risulta $S\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2P\mathbf{v}$ e quindi $S\mathbf{v} = 2P\mathbf{v} - \mathbf{v} = (2P - I)\mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_O$. Da ciò segue la linearità. Indicando con U la retta ortogonale a W si ha che ciascun vettore non nullo di questo sottospazio si muta con S nell'opposto e quindi U è un autospazio di autovalore $\lambda = -1$; W è un autospazio di autovalore $\lambda = 1$.

2.E 1. Gli autovalori sono gli elementi della diagonale, come si vede dal calcolo diretto del polinomio caratteristico.

2. Basta calcolare $\det(A - \lambda I)$ facendo uso dello sviluppo di Laplace.

3. Sappiamo che $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$; risulta $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A\lambda\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$ e quindi $\mathbf{x}$ è un autovettore per A^2 di peso λ . Iterando il procedimento si trova che lo stesso vettore $\mathbf{x}$ è un autovettore per l'operatore A^k con peso λ^k .

4. Per definizione di autospazio si ha $V_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{o}\} = \ker(A)$.

5. $\text{rg}(A) = 1$ quindi $\dim(\ker(A)) = 2$ e $\ker(A) \neq \{0\}$; i vettori non nulli di questo sottospazio sono autovettori di peso $\lambda = 0$.

- 3.E** 1. Risolvendo il polinomio caratteristico si trovano gli autovalori $\lambda = 0, 2, 3$. Risolviamo i sistemi $(A - \lambda I)x = 0$ per i valori di λ indicati, e scegliamo una soluzione per ciascuno di essi (la scelta è arbitraria!), per esempio $(-1, 2, 1), (1, 0, 1), (-1, -1, 1)$; la matrice C che li contiene per colonne è non singolare ed è una matrice diagonalizzante. La forma diagonale è determinata dall'ordine con cui si scrivono gli autovettori nella matrice C .
2. Sviluppando il polinomio caratteristico si trovano gli autovalori reali $\lambda = 0, -\sqrt{6}, \sqrt{6}$ cui corrispondono ordinatamente gli autovettori $(-\frac{1}{5}(2+i), 0, 1); (2+i, -\sqrt{6}, 1) (2+i, \sqrt{6}, 1)$. I vettori proposti sono indipendenti e quindi la matrice assegnata si diagonalizza su $\mathbb{C}$.
3. La matrice ha gli autovalori $\lambda = \pm i$ quindi non si diagonalizza su $\mathbb{R}$; si trovano quindi l'autovettore di componenti $-i, 1$ per $\lambda = -i$ e quello di componenti $i, 1$ per $\lambda = i$. La matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

4.E 1. Gli autovalori sono $\lambda = 1$, con molteplicità $\nu = 2$, e $\lambda = 7$. La matrice si diagonalizza perchè $\dim(V_2) = 2$; una scelta per la matrice diagonalizzante è data da:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{cui corrisponde} \quad \Lambda = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 7 \end{vmatrix}$$

2. La matrice della trasformazione (nella base canonica) è

$$A_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} \quad \text{e gli autovalori sono } \lambda = 1, \text{ con molteplicità } 2, \text{ e } \lambda = k.$$

Inoltre $\dim(V_1) = 1$ se $k \neq 1$; $\dim(V_1) = 2$ se $k = 1$ e quindi vi è un solo autovalore di molteplicità 3. Pertanto l'operatore non si diagonalizza per nessun valore di k .

3. Gli autovalori sono $\lambda = 0, 3$, il primo con molteplicità 2. Una base per V_0 è data $v = (-1, 0, 1)$ e $w = (-1, 1, 0)$. Poichè $\dim(V_0) = 2$ e gli autovalori sono reali A si diagonalizza su $\mathbb{R}$. Un autovettore per l'autospazio V_3 è per esempio il vettore $u = (1, 1, 1)$. Una matrice diagonalizzante si ottiene mettendo i vettori v, w, u per colonne. Un'altra si può ottenere alterando u per un fattore non nullo, e/o sostituendo uno o entrambi gli autovettori v e w di V_0 con una loro combinazione lineare che mantenga l'indipendenza.

5.E 1. $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{2}$.

2. $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda - 16 = 0$ non è risolubile elementarmente senza far uso delle formule risolutive. Si ha $Tr(A) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\det(A) = -16 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$.

3. $Tr(A) = Tr(B) = 0$, $\det(A) = 13$, $\det(B) = 118$; pertanto le due matrici non sono coniugate.

6.E 1. In questo caso gli autospazi V_{λ_i} relativi ad A sono tutti bidimensionali. Poichè $B : V_{\lambda_i} \rightarrow V_{\lambda_i}$ ogni vettore di questo sottospazio è un autovettore per B .

2. Le due matrici commutano. Consideriamo gli autospazi per $A : V_2$ di eq.ne $x - z = 0$, V_3 di eq.ni $x = 0, y = 0$ e gli autospazi per $B : V'_1$ di eq.ni $x = y = z$, V'_3 di eq.ne $x = 0$. Risulta che $V_2 \cap V'_3$ è la retta di eq.ni $x = 0, z = 0$, inoltre $V_3 \subset V'_3$, $V'_1 \subset V_2$. Una base comune è costituita dai vettori $e_2, e_3, u = (1, 1, 1)$. Abbiamo usato un procedimento alternativo a quello spiegato nel testo.

3. Avendo assunto gli autovalori distinti segue dall'esercizio 1. La proposizione è vera però in generale!

7. Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO I. 1. $\langle v, a_1 \rangle = 9$, $\langle v, a_2 \rangle = -1$, $\langle a_1, a_1 \rangle = 9$, $\langle a_2, a_2 \rangle = 2$, $v' = (1, 5/2, 3/2)$.

2. La matrice della trasformazione è:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{autovalori } \lambda = -1, 0, \text{ quest'ultimo con molteplicità } 2.$$

3. La matrice A è diagonalizzabile in quanto $\dim(V_0) = 2$. Una matrice

$$\text{diagonalizzante è } C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{vmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Sia x tale che $Ax = \lambda x$ e k un qualunque numero reale; risulta $(A - kI)x = Ax - kx = \lambda x - kx = (\lambda - k)x$. Quindi $A - kI$ ha x come autovettore di peso $\lambda - k$.

ESERCIZIO II. 1. Si trovano gli autovalori $-t, t-2, 3$; ve ne sono due negativi ed uno positivo se $0 < t < 2$.

2. La matrice della trasformazione è invertibile e la matrice A^{-1} rappresenta l'applicazione inversa:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 4/3 & 44/3 & 1/2 & 35/3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 2/3 \\ -1/3 & -8/3 & 0 & -5/3 \end{vmatrix}.$$

3. La trasformazione è invertibile e quindi rappresenta un cambiamento di coordinate. Indicata con A la matrice della trasformazione assegnata, la matrice che esprime il cambiamento di base richiesto è:

$$(A^{-1})^T = \begin{vmatrix} -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 5/2 & 2 & 1/2 \\ -11/4 & -3/2 & 1/4 \end{vmatrix}.$$

ESERCIZIO III. 1. Per trovare la matrice A nella base $1, x, x^2, x^3$ basta calcolare $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$, $D(x^3) = 3x^2$. Risulta:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ e l'unico autovalore è } \lambda = 0.$$

Poichè $\dim(V_0) = \dim(\ker(A)) < 4$ in quanto la matrice è non nulla, certamente la trasformazione non è diagonalizzabile.

2. Una base di W è costituita da A e A^T . Per U è immediato verificare che esso è chiuso rispetto alle operazioni; d'altra parte esso è rappresentato dalle eq.ni $x_3 = 0$, $x_4 - 2x_2 = 0$, dove x_1, x_2 sono le coordinate del primo vettore riga di una matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$, x_3, x_4 quelle del secondo. W può essere rappresentato in eq.ni parametriche ed eliminando i parametri si trovano le eq.ni cartesiane $x_1 = 0$, $x_4 - 2x_2 - 2x_3 = 0$. Il sistema complessivo delle eq.ni di U e di W rappresenta la loro intersezione che risulta avere dimensione 1. $U \cap W$ è generato dalla matrice A .

3. Il prodotto $B^{-1}AB$ è la matrice diagonale che ha ordinatamente i numeri $-1, 1, 2$ sulla diagonale; da ciò si deduce (senza ulteriori calcoli) che A è diagonalizzabile, gli autovalori sono quelli indicati ed una base di autovettori è costituita dai vettori colonna b^1, b^2, b^3 di B che generano rispettivamente gli autospazi V_{-1}, V_1, V_2 . Per la matrice C si trovano gli autovalori $\mu = 1$ e $\mu = 2$ con molteplicità 2; gli autospazi corrispondenti sono $V_1 = \text{Span}(b^1)$, $V'_2 = \text{Span}(b^3, u)$ dove u ha componenti $3, 1, 0$. Quindi $V_{-1} = V'_1$, $V_2 \subset V'_2$.

ESERCIZIO IV. 1. Facendo l'E.G. si trova che per $2 - 3k + k^3 \neq 0$, cioè per $k \neq 1, -2$ il sistema è incompatibile. Sostituendo i due valori indicati e rieffettuando l'E.G. si trova che il sistema è incompatibile per $k = 1$ mentre ammette l'unica soluzione $(1/3, 0, -1/3)$ per $k = -2$.

2. Gli autovalori sono reali e distinti: $0, 1, 3$ quindi l'operatore si

diagonalizza sui reali. Si trovano inoltre gli autospazi:

$$V_0 = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}\right), \quad V_1 = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right), \quad V_3 = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}\right).$$

I generatori sono a due a due ortogonali e per ottenere una matrice diagonalizzante ortogonale basta dividere ciascuno di essi per il suo modulo.

La linearità di T deriva dalla linearità sia del prodotto scalare che del prodotto vettoriale rispetto alla prima variabile. Per determinare $\ker(T)$ ed $\text{Im}(T)$ si può determinare la matrice di T in una base conveniente. Poiché $\mathbf{u}$ è un versore assegnato, scegliamo un versore $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ e sia $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. La base $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è ortonormale ed equiversa alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$. Si ha:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{u} - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} = -4\mathbf{u} \\ T(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} = -\mathbf{w} \\ T(\mathbf{w}) &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} - 4\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} = -4\mathbf{v} \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, $\text{Im}(T) = \mathcal{V}_O$. Un autovettore della trasformazione è già noto, $T(\mathbf{u}) = -4\mathbf{u}$, e quindi è noto l'autovalore -4 . Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = -(4 + \lambda)(\lambda^2 + 1)$ e non ammette ulteriori radici reali. Si conclude che in $\mathcal{V}_O$ vi è un autospazio unidimensionale e che l'operatore non è diagonalizzabile.

Capitolo 8: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

E 3. A e C sono ortogonali in quanto i vettori colonna hanno modulo 1 e sono mutuamente ortogonali. B non è ortogonale in quanto, per esempio, $\|\mathbf{b}^1\| = \sqrt{2}$.

4. Se A è ortogonale risulta $A^T = A^{-1}$ e quindi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T$. Essendo A^T ortogonale i suoi vettori colonna, cioè i vettori riga di A , sono una base ortonormale.

5. Se A e B sono ortogonali risulta $A^T = A^{-1}$ e $B^T = B^{-1}$ quindi $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$.

6. Se A è ortogonale risulta $A^T = A^{-1}$. (a) $(A^{-1})^T = (A^T)^T = A = (A^{-1})^{-1}$ e quindi A^{-1} è ortogonale. (b) $1 = \det(AA^T) \Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$.

8. Risulta $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$. Sia C la matrice che contiene per righe le coordinate di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. La matrice C^T esprime la base canonica in funzione di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, inoltre $\mathbf{x}' = C\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} = C^T\mathbf{x}'$.

2.E 2. I vettori sono indipendenti ed ortogonali; per ottenere una base ortonormale basta dividerli ciascuno per il proprio modulo. Indicata con A la matrice che li contiene per colonne si ha:

$$A = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{vmatrix}, \quad P\mathbf{v} = \begin{vmatrix} -2/3 \\ 2 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{vmatrix}.$$

$$3. \quad P = A(A^T A)^{-1} A^T,$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad (A^T A)^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2/3 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{vmatrix}.$$

3.E 1. Il vettore $\mathbf{w}_1$ si può sostituire con il vettore, ancora indicato nello stesso modo, di componenti $-1, 0, 2, 1$ (perchè?); inoltre $\mathbf{w}_1 \perp \mathbf{w}_2$. Ortogonalizzando si ottengono i vettori $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3 - (1/3)\mathbf{u}_1 + (1/3)\mathbf{u}_2 = (1, 4/3, 1/3, 1/3)$. Si deve ancora dividere ciascun vettore per il suo modulo.

2. In generale no. Nell'esercizio 1 si possono scambiare i primi due vettori in quanto sono ortogonali.

3. I tre vettori sono dipendenti ed i primi due sono indipendenti. Ortonormalizzando questa base si ottiene

$$\mathbf{a}_1 = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, -1/\sqrt{3}), \quad \mathbf{a}_2 = (-1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

4. Si ricordi che in $\mathbb{R}^4$ nell'equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ la x_4 è una variabile libera. Una base di W è data da:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0, 0).$$

Ortonormalizzando si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (0, 0, 0, 1), \\ \mathbf{a}_2 &= (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), \\ \mathbf{a}_3 &= (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0) \end{aligned} \quad P = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

I due vettori proiezione sono ortogonali.

5. Il volume dell'ipercubo di $\mathbb{R}^n$ di lato unitario, costruito cioè sui vettori canonici, vale 1.

4.E 1. $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{w}_1$, $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{w}_2$, $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{w}_1$, $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{w}_2$ quindi $U \perp W$. quattro vettori sono dipendenti quindi $U \neq W^\perp$ in quanto se $U = W^\perp$ ha anche $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

2. Tenuto conto che $W = \ker(A)$ risulta $W^\perp = \text{Im}(A^T)$ e quindi esso è generato da $(3, 2, -1, 1, 0)$ e $(-2, 1, -1/3, 0, 1)$.
3. Imponendo al vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ le condizioni $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ si trovano per $W^\perp$ le eq.ni $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$. Tramite l'E.G. si trova per esempio la base $\mathbf{w}_1 = (-2, 1, 0, 1)$ $\mathbf{w}_2 = (2, -3, 1, 0)$, che deve ancora essere ortonormalizzata.

5.E2. Basta provare che $A^{-1} = A^H$,

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/3 & (\sqrt{3}/3)(1-i) \\ (\sqrt{3}/3)(1+i) & -\sqrt{3}/3 \end{vmatrix}.$$

4. $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = 4$, $\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle = 2(i-1)$. Procedendo con l'ortogonalizzazione si trovano i vettori:

$\mathbf{c}_1 = \mathbf{u}$, $\mathbf{c}_2 = (0, \frac{1}{2}(i-1), \frac{1}{2}(1-i))$, $\mathbf{c}_3 = (\frac{1}{2}i, -\frac{1}{4}(1+i), -\frac{1}{4}(1+i))$, ed occorre dividere per i moduli.

7. Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO I. 1. (a) Sì, in quanto è lineare separatamente nelle variabili x_1, x_2, x_3 e nelle variabili y_1, y_2, y_3 . (b) $\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 - 4y_2x_2 = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. (c) No, perchè $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2 = -(x_1 - 2x_2)^2 \leq 0$. (d) Il vettore $\mathbf{y} = (2, 1)$ è non nullo e risulta $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2x_1 + 2x_1 + 4x_2 - 4x_2 = 0$.

2. Una base di W è data da $\mathbf{w}_1 = (-3, 1, 0, 1)$ $\mathbf{w}_2 = (4, -1, 1, 0)$.

$$\mathcal{P} = \frac{1}{29} \begin{vmatrix} 26 & -7 & 5 & -2 \\ -7 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 11 & 13 \\ -2 & 5 & 13 & 18 \end{vmatrix}, \quad \text{vettore proiezione } \frac{1}{29}(7, -3, -2, -5).$$

3. $S_\alpha = 2\mathcal{P} - I$. Calcolata la matrice $\mathcal{P}$ si ha $S_\alpha \mathbf{x} = (-1, 0, 1, 1)$.

ESERCIZIO II. 1. $\text{Im}(P_W) = W$, $\ker(P_W) = W^\perp$, $\dim(\text{Im}(P_W)) = \dim(W)$, $\dim(\ker(P_W)) = n - \dim(W)$.

2. $\ker(A) \subset \mathbb{R}^4$. Un generatore per $\ker(A)$ è dato dal vettore $(-1, 6, 0, 7)$. L'equazione è $-x_1 + 6x_2 + 7x_4 = 0$.

3. Per ogni t la matrice A della trasformazione nella base canonica è data da:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t+1 \\ t-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \det(A) = t(t^2 - 3) \neq 0 \quad \text{per } t \neq 0, \pm\sqrt{3}.$$

Per $t \neq 0, \pm\sqrt{3}$, $\text{Im}(A)^\perp = \{\mathbf{o}\}$. Per i tre valori esclusi si trova $\text{rg}(A) = 2$. $\text{Im}(A)^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}^1 \rangle = 0, \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}^2 \rangle = 0 \text{ dove } \mathbf{a}^1 \text{ e } \mathbf{a}^2 \text{ sono due}$

vettori colonna di A indipendenti. Per esempio per $t = 0$ si ottiene $x - z = 0$, $y + z = 0$.

ESERCIZIO III. 1. $\det(A) \neq 0$ ma A non è unitaria. Convien ordinare i vettori colonna di A come segue: a^2, a^3, a^1 in quanto a^2 ed a^3 sono ortogonali. Usando Gram-Schmidt si trova la base ortogonale $a^2, a^3, u = (1, 0, i-2)$ ed occorre dividere per i moduli.

2. I vettori u, v sono una base per W . Ortonormalizzando questa coppia si ottiene la base ortonormale: $a_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $a_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$ e la matrice del proiettore nella base canonica è:

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. La matrice A ammette l'autovalore $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$ di molteplicità algebrica 2. L'autospazio V_{-1} ha per base il vettore $w_1 = (-1, 1, 0)$; V_1 ha per base $w_2 = (0, 0, 1)$, $w_3 = (1, 1, 0)$. Osserviamo che $w_1 \perp w_2$, $w_1 \perp w_3$ quindi V_{-1} e V_1 sono ortogonali. Basta quindi ortonormalizzare w_2, w_3 ; poichè nell'ortonormalizzazione (eseguire i calcoli) si produce una coppia a_1, a_2 tale che $\text{Span}(a_1, a_2) = \text{Span}(w_2, w_3) = V_1$ essi sono ancora autovettori di peso 1.



INDICE ANALITICO

- A**
- Aggiunto (operatore) 225
 - Aggiunzione
 - formula di 224, 241
 - Angolo
 - convesso 166
 - fra rette 180
 - fra piani 181
 - fra retta e piano 181
 - Appartenenza
 - proprietà fondamentali di 134
 - Applicazione
 - biunivoca 148
 - iniettiva 148
 - invertibile 148
 - lineare 143, 154
 - suriettiva 148
 - Ascissa sulla retta
 - Assiomi
 - del determinante 97
 - dello spazio euclideo 134
 - Autoaggiunto (operatore) 225
 - Automorfismo 159
 - Autospazio 203
 - equazione di un 206
 - Autovalori 203
 - determinazione degli 207
 - Autovettori 203
 - determinazione degli 206
- B**
- Base 61, 66
 - cambiamenti di 150, 224, 242
 - canonica 62
 - coordinate rispetto ad una 62
 - ortonormale 168, 223, 241
- C**
- Cambiamenti
 - di coordinate di uno spazio vettoriale 151
 - di coordinate ortonormali 224
 - di base equivalenti 175
 - Campo
 - di numeri 2
 - algebricamente chiuso 209
 - Cilindro
 - equazioni cartesiane 193
 - Circonferenza
 - equazioni cartesiane 187, 193
 - equazioni parametriche 190
 - Classe
 - coniugata 160
 - di equivalenza 140
 - Cofattore 93
 - Combinazione lineare
 - di equazioni 17
 - di vettori 31
 - Complemento
 - algebrico 93
 - ortogonale 237
 - Componente di un vettore 166
 - Composizione (prodotto)
 - di matrici 38
 - di permutazioni 91
 - Condizioni
 - di ortogonalità 181
 - di parallelismo 116, 182
 - lineari 130
 - Congruenza (assiomi di) 136
 - Conica
 - equazione canonica metrica 188, 189
 - Coniugazione 158
 - Coordinate
 - cartesiane affini 111
 - cartesiane ortonormali 111
 - di vettore 62
 - Cramer (teorema di) 103
- D**
- Decomposizione
 - delle proiezioni ortogonali 230
 - Determinante
 - definizione di 93
 - proprietà del 96, 98
 - regole di calcolo 93
 - diagonalizzazione
 - problema della 204
 - simultanea 216
 - Dimensione
 - della somma di sottospazi 82, 83
 - dell'intersezione di sottospazi 83
 - di uno spazio vettoriale 63
 - finita 67
 - infinita 67
 - Dipendenza lineare 31, 66

Distanza

- di due punti 178
- di un punto da una retta 183, 184
- di un punto da un piano 182

E**Eliminazione**

- di Gauss (v. Gauss)
- di parametri 78

Ellisse

- equazione canonica metrica 188
- equazioni parametriche 191
- equazione polare 190

Ellissoide 195**Endomorfismo 158****F****Fascio**

- di piani 111
- di rette nel piano 121
- di rette nello spazio 130

G**Gauss**

- eliminazione all'indietro 25
- eliminazione di 19

Generatori

- sistema di 33, 66

Gradi di libertà 130**Gram-Schmidt**

- ortonormalizzazione di 170, 232

Grassmann

- formula di 83

I**Immagine**

- di una matrice 146
- di una trasformazione 154
- inversa 148

Indipendenza lineare 31, 66**Invarianti**

- per l'E.G. 100
- per coniugazione 160, 215

Iperbole

- equazione canonica metrica 188
- equazioni parametriche 191

Iperboloide 195**Isomorfismo**

- fra spazi vettoriali 154

L**Laplace**

- sviluppo di 93

M**Matrice 5**

- aggiunta 102
- a scala 18
- coniugata trasposta 239
- dei coefficienti di un sistema 5
- diagonale 41
- diagonalizzante 205
- di permutazione 51
- di proiezione 227, 241
- di tipo $m \times n$ 5
- elementare 35
- elementare unipotente 49
- identica (o identità) 40
- inversa 47, 102
- invertibile 45
- ortogonale 169, 223
- quadrata di ordine n 6
- quadrata non singolare 23
- scalare 41
- simmetrica (reale) 95
- singolare 23
- trasposta 94
- triangolare 41
- triangolare unipotente 41, 49
- unitaria 241

Matrici coniugate 158**Misure angolari**

- fra piani 180
- fra rette 180
- fra rette e piani 181
- fra vettori 166

Molteplicità

- algebrica di autovalori 212
- geometrica di autovalori 212

Moltiplicatore 19**Modulo (di un vettore) 168, 222, 240****N****Nucleo**

- di una matrice 146
- di una trasformazione 154

O**Operatore**

- di proiezione ortogonale 227
- lineare 154

Orientazione

- del piano 175
- dello spazio 176
- di una retta 179

lati
teorema degli 86, 255

Ortogonalità
- condizioni di 181
fra vettori 168, 223, 240
fra sottospazi 236

P

Parabola 189
paraboloide 195

Parallelismo
- condizioni di 116, 182
di sottovarietà 74
parametri
- direttori 115
- di giacitura 115
liberi 10
permутazione 88
- fondamentale 89
- segno di una 90
piani
- fascio di 111, 113
- stella di 113

Piano
- equazione cartesiana di un 79, 111
- equazione segmentaria 124
- equazioni parametriche di un 77
- euclideo 135

Polinomi 19, 20, 22
polinomio caratteristico 206

Prodotto
- fra matrici 35
- hermitiano canonico 239
- scalare 167
- scalare canonico 169, 221
- scalare fra vettori geometrici 167
- vettoriale 176

Proiettore 227
matrice di un 187

Proiezione ortogonale 171
- di una circonferenza su un
piano coordinato 194
- su un sottospazio 227

Q

Quadriche
equazioni canoniche metriche 195

R

Raggio
- di una circonferenza 187, 194
- di una sfera 192

Rango (di una matrice) 23
- significato geometrico del 69, 70

Retta
- equazione cartesiana di una 79, 111
- equazione ridotta di una 122, 125
- equazione segmentaria di una 123
- equazioni parametriche di una 74, 77
- parametri direttori di una 115

Riferimento
- affine 111
- ortonormale (ortogonale monometrico) 111

Rouché-Capelli (teorema di) 107, 258

S

Sarrus (regola di) 92

Schwarz (disuguaglianza di) 222

Segmento orientato 56

Sfera
- equazione cartesiana 192

Sistemi
- a scala 9
- compatibili 6, 24
- di generatori 33, 66
- equivalenti 17
- lineari generali 5
- quadrati 6
- triangolari superiori 6

Somma
- diretta 82
- diretta ortogonale 237

Sottospazi
- intersezione di 80
- ortogonali 236
- somma di 80
- somma diretta di 82
- somma diretta ortogonale di 237

Sottospazio
- equazioni cartesiane di un 75
- equazioni parametriche di un 77
- generato da 33
- vettoriale 66

Sottovarietà (lineare) affine 74

Spazio
- affine 110
- euclideo 56, 133
- generato dalle colonne 145
- generato dalle righe 145
- nullo (vedi nucleo) 145
- nullo a sinistra 145
- vettoriale 65
- vettoriale metrico 223, 241

- T**
- Traccia di una matrice 215
- Trasformazione
- aggiunta 225
 - autoggiunta 225
 - biunivoca (biiettiva) 148
 - diagonalizzabile 204, 213
 - iniettiva 148
 - lineare 143
 - suriettiva 148
- V**
- Variabili
- dipendenti 10
 - libere 10
- Versore
- di una retta 179
- Vettore
- colonna 29, 36
 - direttore 115
 - geometrico 56
 - libero 65
 - numerico 29
 - opposto 65
 - riga 29, 36
- Vettori
- canonici 41
 - di giacitura 115
 - linearmente dipendenti 31, 66
 - linearmente indipendenti 31, 66
- Volume 234

TESTI CONSIGLIATI

- [A] S. ABEASIS : "Complementi di Algebra Lineare e Geometria", Zanichelli.
- [B-C-M] D. BINI - M. CAPOVANI - O. MENCHI : "Metodi numerici per l'algebra lineare", Zanichelli.
- [H] I. N. HERSTEIN : "Algebra", Editori Riuniti.
- [L] S. LANG : "Algebra lineare", Boringhieri.
- [Hi] D. HILBERT : "Fondamenti della geometria", Feltrinelli.

La Matematica nelle edizioni Zanichelli

Opere di consultazione

Cerasoli, Colorni, Tomassetti **La matematica di oggi per domani**
Clapham **Dizionario di matematica**
Lesina **Software e Hardware**
Dizionario dei termini informatici italiano-inglese, inglese-italiano
Le tavole M · A · F · B · C Repertorio di dati, costanti, formule, tabelle di matematica, astronomia, fisica, biologia, chimica
Wells **Numeri memorabili**

MM/Matematica Moderna

1. Davis **Il mondo dei grandi numeri**
3. Niven **Numeri razionali e numeri irrazionali**
4. Sawyer **Che cos'è il calcolo infinitesimale**
7. Becknabach, Bellman **Introduzione alle disuguaglianze**
8. Speranza **Relazioni e strutture**
10. Kazarinoff **Disuguaglianze geometriche**

Le Ellissi

Buffa **Fra numeri e dita. Dai conteggi sulle dita alla nascita del numero**
Dunham **Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica**
Enriques **Per la storia della logica. I principi e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici (Ristampa anastatica)**
Volterra **Saggi scientifici**

CM/Collana di Matematica

Bunt, Jones, Bedient **Le radici storiche delle matematiche elementari**
Enriques, Chisini **Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche (2 volumi)**
Pólya **Metodi matematici per l'insegnamento delle scienze fisiche**
Questioni riguardanti le matematiche elementari (a cura di F. Enriques) (2 volumi)

Testi e manuali universitari

Abeasis **Algebra lineare e geometria**
Abeasis **Elementi di algebra lineare e geometria**
Agostinelli, Pignedoli **Meccanica razionale (2 volumi)**
Avondo-Bodino **Elementi di calcolo delle probabilità (2ª edizione)**
Barozzi **Aritmetica. Un approccio computazionale**
Barozzi **Introduzione agli algoritmi dell'algebra lineare**
Barozzi, Matarasso **Analisi matematica (volume 1°) N. R.**
Barsetti **Appunti di algebra**
Bevilacqua, Bini, Capovani, Menchi **Introduzione alla matematica computazionale**
Bevilacqua, Bini, Capovani, Menchi **Metodi numerici**
Bini, Capovani, Menchi **Metodi numerici per l'algebra lineare**
Bruno **Lezioni di algebra lineare uno (Decibel)**
Cerasoli, Eugeni, Protasi **Elementi di matematica discreta**
Cercignani **Spazio, tempo, movimento. Introduzione alla meccanica razionale**
Cercignani **Vettori, Matrici, Geometria**
Dall'Aglio **Calcolo delle probabilità**
De Marco **Analisi 2/1 (Decibel)**
Dolcher **Algebra lineare**
Fabrizio **La meccanica razionale e i suoi metodi matematici (Ristampa ampliata)**
Facchini **Sussidiario di algebra e di matematica discreta (Decibel)**
Finzi **Meccanica razionale (2 volumi)**
Hamilton **Corso introduttivo di algebra lineare**
Kosniowski **Introduzione alla topologia algebrica**
Lax, Burstein, Lax **Analisi matematica con applicazioni e calcolo numerico**
Letta **Probabilità elementare**
Levi-Civita **Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa**
Levi-Civita **Opere matematiche: memorie e note (volumi 5° e 6°)**
Levi-Civita, Amaldi **Compendio di meccanica razionale (2 volumi)**
Levi-Civita, Amaldi **Lezioni di meccanica razionale (3 volumi)**
Packel **Matematica dei giochi e dell'azzardo**
Ragusa, Sparacino **Esercizi di algebra. Teoria degli insiemi, teoria dei gruppi, teoria degli anelli**

Ricci **Statistica ed elaborazione statistica delle informazioni**
Salce **Lezioni di algebra lineare due (Decibel)**
Salce **Lezioni sulle matrici (Decibel)**
Stoer, Bulirsch **Introduzione all'analisi numerica (2 volumi)**
Thomas Jr., Finney **Analisi matematica**
Tortorici, Macaluso **Applicazioni automatiche di metodi numerici**
Ventre **Introduzione ai grafi planari**

Saggi

Gardner **Show di magia matematica**
Gardner **L'incredibile dottor Matrix**
Gardner **L'universo ambidestro**
Gardner **Ahi Ci sono! Paradossi stimolanti e divertenti**
Smullyan **Donna o tigre?**
Smullyan **Qual'è il titolo di questo libro?**
Smullyan **5000 Avanti Cristo... e altre fantasie filosofiche**
Smullyan **Alice nel paese degli indovinelli**

Golden Gate

Biermann **Le idee dell'informatica. Un'introduzione graduale alla scienza dei calcolatori**
Torrigni **Ripensare matematica. In preparazione alle facoltà universitarie scientifiche**

CSC/Collana di Scienza dei Calcolatori

Barnes **Programmare in ADA**
Barlee **Programmare in BASIC (2ª edizione)**
Bernardi, Galli, Ratti **La fisica col BASIC**
Bianchi **Officina Ventura. Esercitazioni di Desktop publishing**
Bianchi **Programmare in TURBO PASCAL**
Bianchi **Un personal computer MS-DOS. Impariamo a programmare con M 24**
Bianchi **Editoria col personal computer**
Candeli **Pilot. Un linguaggio per la didattica**
Capuzzo Dolcetta, Falcone **Analisi matematica al calcolatore**
Casadei, Teolis **PROLOG. Dalla programmazione all'intelligenza artificiale**
Casali **Logo**
Crawford, Barnard **BASIC Microsoft**
Duntemann **Il TURBO PASCAL**
Ellis **Programmazione strutturata in FORTRAN 77**
Fiorentini, Tibaldi **Programmare in C. Standard ISO (2ª edizione)**
Gilmore **Introduzione ai microprocessori**
Hoskins **Guida al Personal System/2**
Keller **Programmare in PASCAL**
Kernighan, Pike **UNIX**
Krantz **OS/2**
Piani **Multiprogrammazione e sistemi digitali di controllo**
Scruton **Introduzione al calcolo numerico in BASIC**
Tonti **Progettazione e realizzazione di programmi didattici**
Touretzky **Common Lisp Un'introduzione graduale all'elaborazione simbolica**

Informatica e linguaggi di programmazione

Andronico e altri **Esercitazioni di programmazione**
Andronico e altri **Manuale di informatica**
Andronico e altri **Principi di informatica**
Andronico e altri **Scienza degli elaboratori (2 volumi)**
Casadei, Teolis **Introduzione all'informatica: la programmazione**
Daboni e altri **Ricerca operativa**
Siciliano **Il COBOL. Linguaggio ed esercitazioni**

Prospettive Didattiche

Alfano, Pascucci **Matematica, Informatica, Logica**
Speranza **Matematica per gli insegnanti di matematica**
Speranza, Medici Carraffa, Quattrocchi **Insegnare la matematica nella scuola elementare**

Collana di strumenti didattici Zanichelli/IBM

Bernardi, Galli, Ratti **Fisica. Meccanica e Termodinamica (vol. 1°); Eletticità e Ottica (vol. 2°) edizione con minidisco**
Bettelli Biolchini **Matematica (disponibile anche edizione con minidisco)**
Masetti **Elettronica (disponibile anche in edizione con minidisco)**